

Universidad Autónoma de Madrid  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física Teórica

TESIS DOCTORAL

# Cuantización de ondas de Einstein-Rosen acopladas con materia

**Iñaki Garay Elizondo**

Directores:

**Dr. Jesús Fernando Barbero González**

Instituto de Estructura de la Materia (CSIC)

**Dr. Eduardo Jesús Sánchez Villaseñor**

Universidad Carlos III de Madrid

Instituto de Estructura de la Materia (CSIC)

Madrid, 11 de abril de 2008



*A mis padres*



# Agradecimientos

Quisiera mostrar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, Fernando Barbero y Eduardo Sánchez, por su invaluable ayuda, dedicación y paciencia; así como por los numerosos conocimientos, discusiones y puntos de vista que me han ofrecido. Sin su apoyo esta tesis nunca se habría producido.

Me gustaría agradecer al Instituto de Estructura de la Materia (CSIC) y, en particular, al Grupo de Física Gravitacional al que pertenezco, la ayuda que he recibido tanto en el ámbito científico como en el personal durante la realización de este trabajo. Por otra parte, quisiera agradecer al Ministerio de Educación y Ciencia la concesión en 2004 de una beca del programa de Formación de Profesorado Universitario (FPU), sin cuya ayuda económica habría sido complicado realizar la presente tesis. También me gustaría mencionar la hospitalidad que recibí por parte de la *Penn State University* (State College, U.S.A.) y de la Universidad de Varsovia (Polonia) durante mis estancias allí.

El ánimo y apoyo que me ha mostrado siempre mi familia es inestimable. Quiero darles las gracias a todos ellos y, muy en especial, a mis padres y hermanos. Asimismo, quiero agradecerle a Irune toda la paciencia y ayuda que me ha ofrecido constantemente.

No puedo evitar sonreír al acordarme de un montón de anécdotas, conversaciones y *truchimanadas* vividas durante estos años en extraordinaria compañía. Muchas gracias a mis amigos, por esos jocosos momentos y por toda la alegría y apoyo que me habéis dado.

No cabe duda de que ha habido numerosos factores que han contribuido, de una manera u otra, a que esta tesis se haya podido concluir. Supongo que el haber llegado a este punto ha sido una consecuencia de hechos no siempre fáciles de determinar. Así pues, quiero finalizar agradeciendo todos esos pequeños y no tan pequeños instantes a la gente que contribuyó a los mismos.



# Índice

Agradecimientos	V
Notación y convenios	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Reducciones de simetría en relatividad general . . . . .	5
1.2. Ondas de Einstein-Rosen . . . . .	7
1.2.1. Caso en vacío . . . . .	7
1.2.2. Acoplo de materia . . . . .	9
1.3. Planteamiento y objetivos . . . . .	10
<b>2. Formalismo clásico</b>	<b>13</b>
2.1. Reducción de simetría en las ecuaciones de Einstein con un campo escalar . .	14
2.2. Hamiltoniano en 2+1 dimensiones . . . . .	18
<b>3. Cuantización de Fock</b>	<b>27</b>
3.1. Construcción de Fock para el campo axial en Minkowski . . . . .	28
3.2. Cuantización de Fock de las ondas ER acopladas a un campo escalar . . . .	33
<b>4. Función de dos puntos</b>	<b>39</b>
4.1. Interpretación como amplitudes de probabilidad . . . . .	40
4.2. Resultados en la región asintótica para diferentes parámetros . . . . .	42
4.2.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ . . . . .	43
4.2.2. Desarrollo asintótico en $\tau$ . . . . .	43

4.2.3. Desarrollo asintótico para $\rho_1, \rho_2$ y $\tau$ simultáneamente grandes . . . .	44
<b>5. Función de onda</b>	<b>51</b>
5.1. Estados de Newton-Wigner . . . . .	52
5.2. Propagador de Newton-Wigner . . . . .	56
5.2.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ . . . . .	57
5.2.2. Desarrollo asintótico en $\tau$ . . . . .	57
5.2.3. Desarrollo asintótico para valores grandes de $\rho_1, \rho_2$ y $\tau$ . . . . .	59
5.3. Función de onda en el espacio de posiciones . . . . .	63
5.3.1. Desarrollo asintótico en $\rho$ . . . . .	64
5.3.2. Desarrollo asintótico en $\tau$ . . . . .	65
5.3.3. Desarrollo asintótico para $\rho, \sigma$ y $\tau$ simultáneamente grandes . . . . .	66
<b>6. Estados coherentes</b>	<b>71</b>
6.1. Sistemas $f(H_0)$ . . . . .	72
6.1.1. Tratamiento clásico . . . . .	73
6.1.2. Evolución cuántica . . . . .	74
6.2. Propiedades de los estados coherentes . . . . .	75
6.3. Inexistencia de estados coherentes para sistemas $f(H_0)$ generales . . . . .	77
6.4. Comparación con la dinámica libre y rangos de validez . . . . .	80
6.4.1. Desarrollo asintótico para tiempos cortos . . . . .	82
6.4.2. Desarrollo asintótico para tiempos grandes . . . . .	83
<b>7. Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>A. Funciones de <math>n</math>-puntos</b>	<b>93</b>
A.1. Funciones de $n$ -puntos para el caso libre . . . . .	94
A.2. Funciones de $n$ -puntos para la dinámica completa . . . . .	95
<b>B. Microcausalidad</b>	<b>99</b>
B.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ : conos de luz difuminados . . . . .	100
B.2. Desarrollo en $\tau$ : efectos cuánticos grandes . . . . .	101



B.3. Límite semiclásico: valores grandes de $\rho_1$ , $\rho_2$ y $\tau$ . . . . .	101
B.4. Conmutador cruzado de los campos . . . . .	104
<b>C. Desarrollos asintóticos</b>	<b>107</b>
C.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ de la función de dos puntos . . . . .	107
C.2. Desarrollo asintótico en $\tau$ . . . . .	109
C.3. Desarrollo asintótico para $\rho_1$ , $\rho_2$ y $\tau$ simultáneamente grandes . . . . .	114
<b>D. Cálculo numérico de integrales que contienen dos funciones de Bessel</b>	<b>121</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>



# Notación y convenios

A lo largo de este trabajo seguiremos los convenios utilizados por R. M. Wald en [30,37] para referirnos a los tensores derivados de una métrica espacio-temporal. En concreto, haremos las siguientes elecciones:

- La signatura de las métricas lorentzianas será de la forma  $(- + \dots +)$ .
- El tensor de Riemann de la métrica  $g_{ab}$  estará definido por la identidad

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d,$$

donde  $\omega_d$  es el dual de un campo vectorial arbitrario y  $\nabla_a$  es la conexión de Levi-Civita compatible con  $g_{ab}$ .

- El tensor de Ricci  $R_{ab}$  vendrá dado por la fórmula  $R_{ab} = R_{abc}{}^b$ .

En cuanto a las unidades, consideraremos siempre la velocidad de la luz  $c = 1$ . Habitualmente, (salvo en el capítulo 3) tomaremos también  $\hbar = 1$ . En lo que se refiere a la constante de Newton  $G_N$ , la mantendremos siempre a no ser que se suprima explícitamente. En cualquier caso, se ha puesto especial cuidado durante toda la exposición en especificar el convenio de unidades utilizado.

Por otra parte, haremos uso de la *notación de índices abstractos* de Penrose, según la cual, los índices latinos de un tensor *no* representan sus componentes, sino que son etiquetas para describir el tensor en sí mismo (de la misma forma en la que se suele usar una pequeña flecha sobre los vectores del espacio ordinario tridimensional para identificarlos). De esta forma, un tensor  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  representará la aplicación multilinear:

$$T : V^{*\otimes k} \times V^{\otimes l} \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde  $V$  es el espacio tangente a la variedad considerada y  $V^*$  su dual; y definimos  $W^{\otimes m}$  como el producto tensorial de  $m$  espacios  $W$ .

Finalmente, señalar que  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$  denotan la parte real e imaginaria de un número complejo  $z$ . Iremos definiendo el resto de símbolos (al menos aquellos que no sean estándar) a medida que vayan apareciendo en el texto.

# Capítulo 1

## Introducción

El problema de encontrar una descripción cuántica de la interacción gravitatoria ha sido atacado persistentemente desde los orígenes de la relatividad general (el propio A. Einstein señala, en 1916, que los efectos cuánticos podrían introducir modificaciones en su teoría [1]). La dificultad principal que se encuentra es que la gravedad surge, en el marco einsteiniano, como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por su contenido de materia. En otras palabras, la relatividad general es la teoría dinámica del propio espacio-tiempo, que deja de ser una estructura de fondo (en contraste con lo que ocurre con las demás interacciones). A pesar de los múltiples avances que ha habido en este campo, el problema sigue abierto.

Una posible clasificación preliminar de los planteamientos principales que se han seguido para estudiar este problema los divide en perturbativos y no-perturbativos. Históricamente, la aproximación perturbativa atiende al intento de construir una teoría cuántica de la gravedad a partir de las fluctuaciones de la métrica con respecto de una métrica de fondo fija (que típicamente se toma como la métrica plana de Minkowski). Este programa comenzó ya en la década de 1930 con L. Rosenfeld, M. Fierz y W. Pauli [2] (ver [3] para una discusión breve, más tardía, del propio L. Rosenfeld), y cobró fuerza en los años 60 a raíz de los trabajos de R. Feynman y B. DeWitt [4–8] en los que se discute un tratamiento perturbativo para la relatividad general. Sin embargo, G. t’Hooft y M. Veltman, entre otros, demostraron pronto que la teoría así construida no era renormalizable [9, 10]. Por tanto, se intentó extender la teoría de Einstein de forma que pudiera ser renormalizable o que tuviera una expansión perturbativa finita. Esto se hizo añadiendo términos en forma de potencias de la curvatura a la acción de Einstein-Hilbert o considerando extensiones supersimétricas. Finalmente, los estudios sobre teorías alto-derivativas y supergravedad dieron paso a una teoría mucho más sofisticada y consistente: la *teoría de cuerdas*.

Por otro lado, la línea no-perturbativa se ha basado, esencialmente, en desarrollar el formalismo Hamiltoniano de la relatividad general y llevar a cabo una cuantización canónica. Podemos decir que esta corriente de investigación empezó en la década de los 50 con los trabajos de P. Bergmann y P. A. M. Dirac [11–13], que condujeron a comienzos de los 60, no sin cierto esfuerzo, a una formulación Hamiltoniana de la relatividad general por parte de R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner (formalismo ADM) [14]. Partiendo del formalismo ADM se intentó desarrollar una teoría cuántica formal que dio lugar a la famosa ecuación de Wheeler-DeWitt, que está construida utilizando la ligadura Hamiltoniana. Sin embargo, es difícil dar sentido preciso a dicha ecuación, por lo que este camino no ha permitido dar una cuantización aceptable. Posteriormente, a partir de las nuevas variables para la relatividad general introducidas por A. Ashtekar [57, 58] a mediados de los 80, se desarrolló la gravedad cuántica de lazos (LQG), que es capaz de dar una versión bien definida de una ecuación de tipo Wheeler-DeWitt.

En la exposición anterior he descrito brevemente las líneas de investigación por las que se ha llegado a las dos candidatas principales para constituir una teoría de la gravedad cuántica (se pueden encontrar más detalles y referencias, por ejemplo, en [15–17]). Hay que señalar que nos hemos dejado en el tintero otros puntos de vista que, a pesar de presentar ideas prometedoras, han gozado de una menor atención dentro de la comunidad científica. Entre éstas se encuentran las siguientes: aproximaciones basadas en una versión de la *integral funcional* de Feynman [18]; el formalismo del *Regge Calculus* y las *triangulaciones dinámicas*, éste último con espléndidos resultados actuales [19]; el formalismo de *spin-foams*, que utiliza métodos heredados de la integral funcional y de la LQG [59]; la *geometría no-conmutativa*, introducida por A. Connes [20]; la *Topos Theory*, de C. Isham [21]; la *Twistor Theory* de R. Penrose [22]; los *conjuntos causales* de R. Sorkin [23]... Las cuatro últimas teorías mencionadas parten de la idea de que, si la estructura última del espacio-tiempo es discreta, quizás debiéramos comenzar reformulando la Teoría Cuántica de Campos en un contexto intrínsecamente discreto en vez de hacerlo sobre una variedad diferenciable. Quizás debido a que esto las aleja de la Teoría Cuántica de Campos usual estas aproximaciones han tenido menos seguidores. Aún así hay que tener presente que las ideas introducidas en dichas propuestas pueden aparecer en otros contextos, como ha sido el caso de la geometría no-conmutativa en la teoría de cuerdas.

Volviendo a las dos teorías principales (cuerdas y LQG), me gustaría describirlas más detalladamente, aunque todavía de forma muy somera, enfatizando la gran diferencia que existe entre los puntos de vista respectivos. Quisiera señalar, a modo de ejemplo, la ferviente y constante discusión que hay entre ambas comunidades científicas [24–26].

La teoría de cuerdas [41–44] es la heredera de los espectaculares éxitos obtenidos por

la física de altas energías durante el siglo XX. El modelo estándar describe todas las interacciones de la Naturaleza excepto la gravedad, tratándolas en el contexto del grupo *gauge*  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . Partiendo de este punto, es lógico pensar que deberíamos extender el modelo estándar de forma que incorpore también a la gravedad, la más débil de las interacciones. De esta forma, habríamos conseguido la *teoría del todo* (la teoría que, en caso de existir, unificaría y describiría las cuatro interacciones fundamentales). Hay que remarcar que la idea de la unificación ha sido de gran importancia para la Física, y ha servido de guía para avances significativos dentro del marco de la física fundamental. A este respecto, la teoría de cuerdas es la única candidata que tenemos en la actualidad para llevar a cabo tal unificación de las fuerzas. Los objetos fundamentales de esta teoría –en la que se hace uso crucial de la supersimetría– son cuerdas (objetos unidimensionales) embebidas en un espacio-tiempo de 10 dimensiones. Los diferentes modos de excitación de estas *cuerdas* dan lugar, entre otras, al gravitón y a partículas con números cuánticos compatibles con los de las partículas del modelo estándar. Aparte de ser la única teoría de unificación conocida, ha tenido exitosos resultados. Por ejemplo: se han podido calcular amplitudes en fenómenos de *scattering* a altas energías [45–50]; se ha descrito de manera satisfactoria la entropía de cierta clase de agujeros negros (extremales) haciendo un conteo de los microestados [51–56]; posee una gran riqueza matemática. . . Por otro lado, los enfoques no-perturbativos dentro de la teoría de cuerdas permiten ser optimistas con respecto a la construcción de la teoría última (habitualmente llamada *teoría M*). Por otra parte, los problemas principales que se presentan son: la falta de evidencia experimental directa de las dimensiones extra y de la supersimetría; la precariedad, por el momento, de la descripción no-perturbativa (la teoría M); y la escasez de predicciones físicas.

La gravedad cuántica de lazos (LQG), por su parte, tiene como prioridad la conservación de la invariancia bajo difeomorfismos, una de las características principales de la relatividad general. Esta invariancia se refleja en que no se dispone de un espacio-tiempo con una métrica de fondo fija (ya sea plana o curva) y tiene como consecuencia la necesidad de modificar los conceptos clásicos de espacio y tiempo. En el trabajo pionero de A. Ashtekar [57, 58], basado en los resultados previos de A. Sen [60], se introducen las llamadas *variables de Ashtekar*, que son campos de tipo Yang-Mills (la conexión de Ashtekar) cuya principal virtud es la de simplificar la forma de las ligaduras de la relatividad general. Esto allana el camino hacia una descripción cuántica de la gravedad. Hay que señalar que, sin embargo, al utilizar variables reales [61–63] (con objeto de que la teoría se mantenga real) las expresiones de las ligaduras se complican notablemente. A pesar de este inconveniente, es posible usar estas variables para construir una teoría cuántica de la relatividad general (la LQG) [64–67]. El espacio de Hilbert en esta aproximación está generado por *spin-networks* (grafos orientados cuyas aristas están etiquetadas mediante representacio-

nes del grupo  $SU(2)$ ), que son una generalización de los *loops de Wilson* de las teorías de Yang-Mills [68, 69]. El producto escalar en este espacio está definido con la ayuda de la medida de Ashtekar-Lewandowski [70–74]. El principal mérito de la LQG reside en que proporciona una formulación matemática bien definida, rigurosa y no-perturbativa de la gravedad cuántica. Además, es posible definir operadores cuánticos que tienen interpretación de objetos geométricos, tales como áreas y volúmenes. Por otro lado, también, con esta aproximación, se han obtenido resultados importantes sobre los microestados que dan origen a la entropía de los agujeros negros [75–84]. Hay que señalar que en estas descripciones, hay un parámetro libre (el parámetro  $\gamma$  de Barbero-Immirzi) que debe ser fijado mediante argumentos físicos. El principal problema de la gravedad cuántica de lazos es que toda la construcción del espacio de Hilbert de la teoría y los resultados obtenidos son de carácter puramente cinemático, mientras que la implementación de la dinámica se sigue escapando de los tratamientos. Por otra parte, la carencia hasta el momento de estados semiclásicos que, de alguna forma, ayuden a entender la conexión con el régimen descrito por la relatividad general es, asimismo, un serio problema.

En cualquier caso, la exposición anterior nos lleva a concluir que todavía no disponemos de una teoría completa de la gravedad cuántica. Las primeras dificultades importantes que encontramos a la hora de construirla parecen estar relacionadas con dos de las propiedades características de la relatividad general. Concretamente, la combinación de la invariancia bajo difeomorfismos –la métrica es un objeto dinámico– junto con la presencia de infinitos grados de libertad. Es posible que la no-renormalizabilidad de la teoría esté relacionada con este hecho. Otro problema que, en el contexto de las dos teorías que hemos discutido, no tiene una solución sencilla, es el de cómo recuperar la relatividad general a partir de una teoría de la gravedad cuántica considerada en los límites correspondientes. Por supuesto, a todas estas dificultades debemos añadir otros problemas conceptuales, con raíces en la teoría de Einstein, entre los que merece la pena destacar el conocido problema del tiempo, ampliamente discutido, por ejemplo, por C. Isham y colaboradores [27, 28]. Este problema se debe a que, a causa de que la geometría misma es dinámica, en relatividad general no contamos con ninguna variable temporal privilegiada con la que describir la posible evolución de los sistemas.

Finalmente, queremos volver a remarcar que, aunque se ha avanzado notablemente en este campo, seguimos sin disponer de una descripción cuántica completa de la gravedad. En el mejor de los casos lo que tenemos son aproximaciones, líneas de investigación más o menos fructíferas, o ciertos resultados que nos sirven como guía para conocer cuáles pueden ser sus efectos observables. Por todo ello, para ganar intuición sobre este problema, consideramos útil estudiar modelos con simetría que conserven las características principales de la teoría



completa, pero que eviten algunas de sus dificultades. En particular, es interesante trabajar con modelos resolubles en los que la cuantización se pueda llevar a cabo de manera exacta. Dedicaremos el resto de esta introducción a discutir algunos de estos modelos, haciendo especial énfasis en las ondas de Einstein-Rosen acopladas con materia, que será el objeto de estudio de esta tesis.

## 1.1. Reducciones de simetría en relatividad general

Las simetrías presentes en un sistema han jugado siempre un papel fundamental en la formulación física del mismo. Tanto en mecánica clásica (donde cada simetría lleva asociada una cantidad conservada en virtud del teorema de Noether) como en mecánica cuántica (donde se puede asociar un operador unitario o antiunitario a cada una de ellas), las simetrías ayudan, como norma general, a resolver la dinámica del sistema físico en cuestión.

Concretamente, dentro del marco de la relatividad general el rol de las simetrías es esencial a la hora de encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein (ver por ejemplo [31]). En esta tesis, nos vamos a plantear el estudio de reducciones de simetría (el conjunto de todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein que tengan una cierta simetría) que podamos resolver exactamente para, posteriormente, tratar de llevar a cabo la cuantización del sistema reducido y extraer información física del mismo en el régimen cuántico. Podemos hacer una distinción de los diferentes sistemas con simetrías atendiendo a los grados de libertad de los correspondientes modelos reducidos. Así, están los llamados modelos de *mini-superspacio* [98,99], que tienen un número finito de grados de libertad y los modelos de *midi-superspacio* [129] que conservan grados de libertad locales.

El paradigma de los modelos de *mini-superspacio* son los modelos de Bianchi [32]. Se trata de modelos cosmológicos anisótropos pero espacialmente homogéneos. Estos modelos, admiten un grupo de isometrías espaciales triparamétrico que actúa sobre hipersuperficies de tipo espacio. Debido a la gran simetría espacial que presentan han sido extensamente estudiados en el contexto de la cosmología cuántica, proporcionando interesantes resultados. Sin embargo, también a causa de su alta simetría, tienen un número finito de grados de libertad, por lo que no son teorías cuánticas de campos en el espacio reducido.

Por otro lado, tenemos los modelos de *midi-superspacio*, que además de tener infinitos grados de libertad (describen genuinas teorías de campos) conservan cierta invariancia bajo difeomorfismos. Éstas, como ya se ha comentado anteriormente, son dos de las características principales de la relatividad general que se encuentran, posiblemente, en el origen de la no renormalizabilidad de la teoría. Debido a esto, su eventual cuantización (previsiblemente

más sencilla que el caso general) tiene un gran interés. Dentro de este grupo de modelos, han tenido mayor relevancia los que poseen dos campos de vectores de Killing conmutantes de género espacio. Podemos hacer una clasificación de estos últimos [100] –ver tabla (1.1)– atendiendo a su grupo de isometrías y la topología de la hipersuperficie espacial  $\Sigma^3$  (siendo la topología del espacio-tiempo considerado  $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R} \times \Sigma^3$ ). Si no imponemos restricciones adicionales sobre los vectores de Killing, tenemos dos polarizaciones distintas que dan lugar a complicados sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas. Por el contrario, los casos en los que los vectores de Killing son, además, ortogonales a hipersuperficies (polarización lineal) resultan especialmente interesantes porque las ecuaciones del proceso de reducción se simplifican notablemente y se pueden resolver de forma exacta.

Grupo $G_2$	Variedad $\Sigma^3$	Acción	Nombre
$U(1) \times U(1)$	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$	No libre	Modelo de Schmidt Modelo $\mathbb{T}^3$ de Gowdy Modelo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ de Gowdy Modelo $\mathbb{S}^3$ de Gowdy
	$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$	Libre	
	$\mathbb{T}^3$	Libre	
	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$	No libre	
	$\mathbb{S}^3$	No libre	
$\mathbb{R} \times U(1)$	$\mathbb{R}^3$	No libre	Ondas gravitatorias cilíndricas Agujero de gusano cilíndrico
	$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$	Libre	
	$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$	Libre	
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	Libre	
	$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$	Libre	

Cuadro 1.1: Clasificación de los modelos de midi-superespacio que presentan un grupo de isometrías espaciales  $G_2$  conexo y de dimensión 2, atendiendo a la topología de las hipersuperficies espaciales  $\Sigma^3$  y siendo la topología del espacio-tiempo completo  $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R} \times \Sigma^3$ . El grupo puede, según cada caso, actuar de forma libre o con órbitas degeneradas.

Los modelos de Gowdy (ver tabla 1.1) han gozado de una gran atención en los últimos años. El caso que ha sido tratado más frecuentemente es el que tiene la topología del 3-toro  $\mathbb{T}^3$  y polarización lineal, el cual, constituye un modelo cosmológico con singularidad inicial, inhomogéneo, anisótropo y espacialmente cerrado. Este modelo fue estudiado primeramente, de forma clásica, por R. H. Gowdy [101, 102]. Más adelante, se estudió la construcción de un Hamiltoniano dependiente del tiempo para este sistema por deparametrización, así como la cuantización canónica del mismo [103–107] y el estudio de los problemas existentes a la hora de dar una implementación unitaria de la dinámica [108, 109]. En los últimos tres años ha habido numerosos trabajos en los que se estudia y se demuestra la existencia de un

operador unitario de evolución [110–115], e incluso es posible dar una construcción formal del mismo [116]. Recientemente, se han comenzado a estudiar también los casos de modelos de Gowdy con otras topologías ( $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^3$ ) [117–120]. Otro ejemplo de modelos de este tipo es el modelo de Schmidt [121], que es también un modelo cosmológico cuya cuantización se trata en [116].

Otro modelo interesante es el de las ondas gravitatorias con simetría cilíndrica y polarización general. Éstas han sido estudiadas clásicamente tanto de forma analítica [122, 123] como numérica [124] y, más recientemente, se ha estudiado su cuantización canónica [125, 136]. Por último, el modelo de las ondas de Einstein-Rosen, que será el tema central de esta tesis y que discutiremos a continuación, corresponde a las ondas gravitatorias cilíndricas de la tabla (1.1) tomando polarización lineal.

## 1.2. Ondas de Einstein-Rosen

Las ondas de Einstein-Rosen son algunas de las soluciones no estacionarias más sencillas de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Como se muestra en la tabla (1.1), las ondas gravitatorias cilíndricas presentan un grupo de isometrías bidimensional  $G_2 = \mathbb{R} \times U(1)$  y la topología del espacio-tiempo es  $\mathbb{R}^4$ . Además presentan polarización lineal, es decir, son soluciones con dos campos de vectores de Killing espaciales que conmutan entre sí y que son ortogonales a hipersuperficies. El hecho de que el sistema reducido conserve infinitos grados de libertad y cierta invariancia bajo difeomorfismos (en la dirección radial), junto a la forma que adopta el Hamiltoniano que lo describe (éste es independiente del tiempo y función de un Hamiltoniano libre), convierten a las ondas de Einstein-Rosen en un atractivo sistema para estudiar tanto su cuantización como los diferentes aspectos que se puedan derivar de la misma.

En lo que sigue, describiremos brevemente este sistema. En primer lugar, estudiaremos el caso original (partiendo de un espacio-tiempo de 4 dimensiones en vacío) y, seguidamente, trataremos el caso que nos va a interesar más concretamente: las ondas de Einstein-Rosen acopladas con un campo escalar sin masa con simetría cilíndrica (la discusión para el acoplo de varios campos escalares es directa).

### 1.2.1. Caso en vacío

Las ondas de Einstein-Rosen fueron introducidas en un controvertido artículo<sup>1</sup> de A.

---

<sup>1</sup>Véase [126] para una interesante discusión histórica.

Einstein y N. Rosen en 1937 [127] –aunque al parecer el primero en llegar a estas soluciones fue G. Beck [128]–. El estudio de la cuantización canónica de las ondas de Einstein-Rosen fue iniciado por K. Kuchař en 1971 [129]. Años más tarde, en 1987, M. Allen trató el problema de la cuantización de un sistema gravitatorio acoplado con un campo escalar sin masa con simetría rotacional en 2+1 dimensiones [130] que, sin él saberlo, se corresponde con el mismo sistema tratado en [129]. Posteriormente, a lo largo de la década de los 90, el problema fue ampliamente estudiado por el grupo de A. Ashtekar en [131, 132], donde se dio rigor al formalismo Hamiltoniano y se trató la cuantización canónica del mismo.

Con objeto de desarrollar el formalismo Hamiltoniano, restringiremos nuestro estudio a las soluciones asintóticamente planas (tal y como se explicará en el capítulo 2, el concepto de planitud asintótica en 2+1 dimensiones no implica que las soluciones se deban ir acercando a la métrica de Minkowski en el infinito, sino que se permite la existencia de un defecto angular [92]). De esta forma, al limitarnos a este caso, tenemos un generador de traslaciones temporales en la región asintótica que nos provee de una noción canónica privilegiada de tiempo [93].

Por otro lado, veremos que tras realizar la reducción de simetría en la dirección del Killing traslacional utilizando la técnica desarrollada por R. Geroch [133], los grados de libertad de la métrica original en 4 dimensiones quedan descritos por un campo escalar sin masa (que en adelante llamaremos *escalar geométrico o gravitatorio*), con simetría axial, que evoluciona en un fondo minkowskiano auxiliar en 2+1 dimensiones. Llevando a cabo el formalismo Hamiltoniano, observamos que el Hamiltoniano físico  $H$  del sistema es una función  $f$  (no lineal y acotada) del Hamiltoniano  $H_0$  de una teoría libre, es decir, del Hamiltoniano libre que describe la propagación de un campo escalar sin masa con simetría axial en un espacio-tiempo minkowskiano de 2+1 dimensiones:  $H = f(H_0)$ . Ésta será la razón final por la que el sistema es exactamente resoluble tanto clásica como cuánticamente.

Este modelo ha proporcionado algunos resultados ciertamente interesantes. Concretamente, hay una serie de trabajos de principios de esta década (precursores del que desarrollaremos aquí) en los que se estudia los efectos provenientes de haberlo cuantizado. Así, se analizan aspectos como la microcausalidad o la incertidumbre temporal mínima en relatividad general cuántica [134–138]. Cabe destacar el importante papel que juegan los desarrollos asintóticos (altamente no triviales) estudiados en [148] a la hora de estudiar el límite clásico de los objetos que se estudian.

Para finalizar, quisiéramos señalar el creciente interés que han adquirido estos modelos dentro del contexto de la gravedad cuántica de lazos, habiendo una gran actividad dentro de esta comunidad científica dirigida a intentar cuantizarlos con las técnicas de LQG. La posibilidad de poder comparar los resultados que se explicarán en esta tesis con una even-

tual cuantización *à la loop* del modelo es ciertamente interesante. Como paso intermedio, podríamos intentar describir la dinámica cuántica de las ondas de Einstein-Rosen mediante una cuantización polimérica [85–91] y tratar de discernir qué efectos serían los propios de haber cuantizado un sistema gravitatorio y cuáles pudieran proceder del hecho de haber usado una *cuantización exótica*.

### 1.2.2. Acoplo de materia

En el presente trabajo enriquecemos el sistema de las ondas de Einstein-Rosen introduciendo un campo escalar de materia con simetría cilíndrica. El estudio viene inspirado por el uso de partículas de prueba en relatividad general. Clásicamente se introducen partículas de prueba –objetos puntuales con masa despreciable y que, por tanto, no tienen influencia sobre la geometría– cuyas trayectorias son las geodésicas de la métrica que queremos estudiar. Sin embargo, no está claro cuál podría ser el análogo cuántico de estas partículas. En todo caso, la disponibilidad de materia en nuestro modelo nos permite utilizarla como sondas para explorar la geometría espacio-temporal, usando los cuantos del mismo a modo de partículas de prueba.

Las ondas de Einstein-Rosen acopladas con un campo escalar fueron ya estudiadas desde un punto de vista clásico en [139, 140], aunque su formulación Hamiltoniana no fue considerada hasta [141]. Dicho sistema puede ser resuelto de forma exacta tanto clásica como cuánticamente [141]. La forma en la que se presentan las ecuaciones de Einstein en este caso sugiere que un tratamiento Hamiltoniano llevaría a una descripción muy similar a la encontrada por A. Ashtekar, M. Pierri y M. Varadarajan [131, 132] para el caso en vacío asintóticamente plano, como de hecho ocurre. Por tanto, podemos llevar a cabo la cuantización del sistema utilizando técnicas análogas a las usadas para el caso en vacío.

Las posibles aplicaciones de este modelo son varias. Al haberlo cuantizado exactamente se puede, como ya hemos comentado, utilizar las excitaciones de tipo partícula del campo escalar cuantizado para explorar la estructura causal del sistema, tal y como se describe en [142] extendiendo los resultados de [134, 138, 148]. También es posible estudiar las funciones de dos puntos de los campos y darles una interpretación de probabilidad, en el mismo sentido que se les da en la teoría cuántica de campos habitual. Si queremos mejorar la imagen probabilística y trabajar con auténticas amplitudes de probabilidad en el espacio de posiciones, debemos construir una base de estados localizados (análogos a los introducidos por Newton y Wigner en Teoría Cuántica de Campos usual) sobre la que construir funciones de onda normalizadas. Como veremos, podremos estudiar la evolución de este tipo de funciones de onda así como el límite clásico, que consiste en considerar escalas

espacio-temporales grandes en las que, en principio, no debieran estar presentes los efectos gravito-cuánticos.

Para finalizar, queremos señalar el gran interés que tendría la posibilidad de construir estados coherentes, entendidos como estados cuánticos cuyos homólogos clásicos fueran las soluciones de las ecuaciones de Einstein correspondientes a las ondas de Einstein-Rosen. En este caso podríamos extender el estudio del límite clásico (realizado sólo para el estado de vacío, cuyo análogo clásico es la métrica de Minkowski) a estados correspondientes a espacio-tiempos curvos que fueran soluciones de las ondas de Einstein-Rosen. Desafortunadamente, demostraremos que para este sistema no se pueden construir estados de este tipo que presenten todas las buenas propiedades que poseen los estados coherentes del oscilador armónico [161]. En cualquier caso, cabría la posibilidad de utilizar los estados coherentes de la dinámica libre en ciertos regímenes en los que éstos se comportaran de forma aproximada como estados coherentes de la dinámica completa. Sin embargo, veremos que esto tampoco es posible, al menos para periodos de tiempo largos.

### 1.3. Planteamiento y objetivos

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la cuantización del sistema formado por las ondas de Einstein-Rosen acopladas a un campo escalar sin masa y extraer la información física sobre los efectos que se deriven de ella.

Sin embargo, no es nuestra intención fijarnos únicamente en las construcciones matemáticas o en las interpretaciones someras que se puedan llevar a cabo, sino que nos gustaría ir un poco más allá y tratar de discernir (sin querer ser osados al llevar la extrapolación demasiado lejos) cuáles de los efectos obtenidos al cuantizar este sistema reducido de forma exacta podrían evidenciar o reflejar características de una posible teoría de la gravedad cuántica completa. Con este propósito haremos, por ejemplo, comparaciones constantes con los resultados correspondientes a un campo propagándose en un espacio-tiempo plano con las mismas simetrías que nuestro sistema (simetría axial) de modo que podamos ganar intuición sobre qué efectos son propios de la simetría impuesta y cuáles de la cuantización de la geometría.

Otro aspecto en el que haremos especial énfasis es el límite clásico, correspondiente a considerar escalas de distancia y tiempo muy superiores a la escala de longitud característica dictada por las ecuaciones de nuestro modelo. De esta forma, observaremos cómo surgen las geodésicas nulas en nuestro sistema cuantizado y cómo emergen los conos de luz habituales en este límite (reproduciendo los resultados de [148]). También veremos los novedosos efectos

que aparecerán en el sector gravito-cuántico. Dentro del contexto de la búsqueda de un límite clásico, intentaremos construir estados coherentes para nuestro sistema y, ante la imposibilidad de obtenerlos, estudiaremos cuantitativamente los regímenes en los que se podrían utilizar los estados coherentes de la dinámica libre.

El plan que seguiremos es el siguiente. En el próximo capítulo estudiaremos clásicamente las ondas de Einstein-Rosen acopladas a un campo escalar sin masa con simetría cilíndrica. Resolveremos las ecuaciones de Einstein para este sistema y estudiaremos el formalismo Hamiltoniano y las ecuaciones del movimiento. Observaremos aquí que el Hamiltoniano es una función acotada y no trivial de la suma de dos Hamiltonianos libres correspondientes a dos campos escalares sin masa con simetría axial propagándose en un fondo minkowskiano de  $2+1$  dimensiones. Discutiremos las ecuaciones de movimiento que se derivan del mismo y estudiaremos un cambio de variable temporal (un tanto peculiar) que desacopla las ecuaciones dando lugar a dos ecuaciones de ondas. Éste es el hecho que nos permitirá obtener una cuantización exacta pese a estar tratando con un sistema en interacción.

En el capítulo 3 llevaremos a cabo la cuantización de Fock del modelo. En primer lugar, como paso previo, discutiremos la construcción de Fock para un campo escalar con simetría axial en Minkowski y, seguidamente, valiéndonos de la forma especial de nuestro Hamiltoniano, completaremos el proceso de cuantización. Obtendremos el operador Hamiltoniano y, directamente al no depender este último del tiempo, el operador unitario de evolución. Una vez conocido éste de forma exacta podremos estudiar diferentes aspectos físicos del modelo.

El capítulo siguiente queda reservado para las funciones de dos puntos. Éstas pueden ser interpretadas de forma aproximada como amplitudes de probabilidad de encontrar una partícula a una distancia concreta del eje de simetría en un tiempo  $t_2$  cuando ha sido creada a otra cierta distancia del eje en un tiempo  $t_1$ . Obtendremos expresiones cerradas para las funciones de dos puntos –aunque complicadas desde el punto de vista matemático– y, mediante el uso de técnicas asintóticas, extraeremos información física de las mismas.

En el quinto capítulo, construiremos una base de estados localizados de tipo *Newton-Wigner* con los que podemos introducir funciones de onda cuyos módulos al cuadrado serían auténticas amplitudes de probabilidad en el espacio de posiciones. Estudiando el comportamiento asintótico del *propagador de Newton-Wigner* y de la evolución de las funciones de onda, podremos observar cómo aparecen en el límite clásico las geodésicas nulas de una métrica minkowskiana emergente.

En el capítulo 6 estudiaremos, primeramente, la dinámica tanto clásica como cuántica de los sistemas con Hamiltonianos del tipo  $H = f(H_0)$  y haremos un breve repaso de las propiedades de los estados coherentes del oscilador armónico. Seguidamente, daremos un

argumento según el cual es imposible construir estados coherentes para este tipo de sistemas con las buenas propiedades que exhiben los del oscilador armónico. Además, discutiremos en qué medida se pueden utilizar los estados coherentes de la dinámica libre para estudiar las ondas de Einstein-Rosen.

Tras las conclusiones del capítulo 7, hemos incluido cuatro apéndices que extienden y complementan los temas tratados. Así, en el apéndice A estudiamos las funciones de  $n$ -puntos para nuestro sistema. El apéndice B recoge, por completitud, los resultados sobre microcausalidad obtenidos en [148] en los que se puede apreciar el esperado efecto de *difuminado* cuántico de los conos de luz; además, se incluye un breve cálculo del conmutador cruzado de los campos gravitatorio y materia. En el apéndice C se detallan los cálculos asintóticos utilizados en los capítulos 4 y 5. Finalmente, hemos incluido un apéndice en el que se explica un método útil para calcular numéricamente la clase de integrales que nos aparecerán de forma recurrente a lo largo de todo el trabajo.



## Capítulo 2

### Formalismo clásico

En este capítulo, estudiaremos detalladamente las reducciones de simetría en relatividad general de espacio-tiempos  $(g_{ab}^{(4)}, \mathbb{R}^4)$  cilíndricamente simétricos cuyo contenido de materia consiste en una familia de campos escalares sin masa. Aunque en principio es posible relajar las condiciones de regularidad, consideraremos únicamente configuraciones suaves de los campos, ya que éstas serán suficientes para construir la teoría cuántica<sup>1</sup> (capítulo 3). En concreto, tanto la métrica como los campos escalares serán  $C^\infty$  en todo  $\mathbb{R}^4$ , incluido el *eje* de simetría. Éste se define como la única órbita degenerada del grupo de isometrías espaciales  $\mathbb{R} \times U(1)$  presentes en nuestro sistema [129]. Es importante señalar que el eje es una variedad lorentziana bidimensional (que puede ser parametrizada con una coordenada espacial y otra temporal).

Dentro de todo el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Einstein con simetría cilíndrica nos va a interesar únicamente el subconjunto de las que denominaremos *asintóticamente planas*. Nótese que, puesto que el grupo de isometrías contiene al de las traslaciones a lo largo del eje –excepto el caso trivial en el que la solución sea directamente la de Minkowski– no es posible tener soluciones asintóticamente planas en el sentido 3+1 dimensional habitual [30]. Para definir el concepto de planitud asintótica en el contexto de la simetría cilíndrica seguiremos las ideas introducidas por A. Ashtekar y M. Varadarajan en [132] (ver también [100]) y posteriormente generalizadas, mediante una descripción geométrica independiente de las coordenadas, por A. Ashtekar, J. Bicak y B. G. Schmidt [94,95]. En este esquema, después de hacer una reducción de simetría en la dirección del eje, se hace uso de la definición de espacio-tiempo asintóticamente plano en 2+1 dimensiones. Hacemos notar que el concepto de planitud asintótica en 2+1 dimensiones difiere del usual en 3+1.

---

<sup>1</sup>Por supuesto, la teoría cuántica posee estados que no son suaves en absoluto. Sin embargo, éstos se obtienen mediante un proceso de completación de Cauchy a partir de estados suaves.

Como veremos, en 2+1 dimensiones las geometrías asintóticamente planas tienen asociado un ángulo de defecto, relacionado con la masa del espacio-tiempo, que da lugar a una geometría cónica en la región asintótica [92].

La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, resolveremos las ecuaciones de Einstein del sistema haciendo uso de la técnica de reducción de Geroch [133]. Esto nos ayudará para desarrollar el formalismo Hamiltoniano, donde se tendrá especial cuidado con el tratamiento de los términos de frontera de la acción y se elegirá una fijación de gauge. Finalmente, obtendremos y resolveremos las ecuaciones del movimiento.

## 2.1. Reducción de simetría en las ecuaciones de Einstein con un campo escalar

Comenzaremos con las ecuaciones de Einstein del sistema físico descrito en la introducción:

$$\square^{(4)}\phi = 0, \quad (2.1)$$

$$R_{ab}^{(4)} = 8\pi G_N (d\phi)_a (d\phi)_b. \quad (2.2)$$

Aquí,  $R_{ab}^{(4)}$  y  $\square^{(4)}$  son, respectivamente, el tensor de Ricci y el operador de d'Alembert asociados con la conexión de Levi-Civita  $D_a^{(4)}$  compatible con la métrica  $g_{ab}^{(4)}$ . La derivada exterior del campo escalar sin masa  $\phi$  se denota por  $(d\phi)_a$  y  $G_N$  es la constante de Newton.

Para tratar de simplificar las ecuaciones (2.1,2.2), e implementar la simetría  $\mathbb{R} \times U(1)$ , empezamos seleccionando una base del álgebra de isometrías, es decir dos vectores de Killing conmutantes  $\xi^a$  y  $\sigma^a$  asociados, respectivamente, con la simetría traslacional y rotacional. Nos centraremos además en el caso *linealmente polarizado*, de manera que podemos elegir ambos vectores de Killing ortogonales a hipersuperficies. Por otra parte, las rotaciones alrededor del eje de simetría generadas por  $\sigma^a$  satisfacen la condición descrita en [143, 144, 146] según la cual

$$\left. \frac{D_a^{(4)}(\sigma_b \sigma^b) D^{(4)a}(\sigma_c \sigma^c)}{\sigma_d \sigma^d} \right|_{\text{eje}} = 1.$$

Esta condición, conocida como *elementary flatness*, garantiza la periodicidad de  $2\pi$  de la coordenada azimutal  $\sigma$ . En términos de los campos de Killing la simetría del sistema se refleja en la anulación de las derivadas de Lie siguientes:

$$L_\xi g_{ab}^{(4)} = L_\sigma g_{ab}^{(4)} = 0, \quad L_\xi \phi = L_\sigma \phi = 0.$$

Para resolver las ecuaciones de Einstein (2.1, 2.2) haremos uso de las fórmulas de reducción de Geroch [133]. Primero, como las translaciones actúan sin puntos fijos, es posible

reescribir las ecuaciones de Einstein como ecuaciones para campos definidos en la variedad cociente  $\mathcal{M}^3 = \mathbb{R}^4/\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ . Para llevar a cabo este proceso, necesitamos introducir un campo escalar  $\lambda$  y una métrica lorentziana tridimensional  $g_{ab}^{(3)}$  dados por<sup>2</sup>

$$\lambda = \xi_a \xi^a > 0, \quad g_{ab}^{(4)} = g_{ab}^{(3)} + \lambda^{-1} \xi_a \xi_b.$$

Estos campos, al igual que  $\phi$ , están bien definidos en la variedad tridimensional cociente  $\mathcal{M}^3$ . En términos de los mismos, las ecuaciones (2.1, 2.2) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \square^{(3)} \phi &= -\frac{1}{2} g^{(3)ab} (d\phi)_a (d \log \lambda)_b, \\ \square^{(3)} \lambda &= \frac{1}{2\lambda} g^{(3)ab} (d\lambda)_a (d\lambda)_b, \\ R_{ab}^{(3)} &= \frac{1}{2\lambda} D_a^{(3)} (d\lambda)_b - \frac{1}{4\lambda^2} (d\lambda)_a (d\lambda)_b + 8\pi G_N (d\phi)_a (d\phi)_b, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $R_{ab}^{(3)}$ ,  $D_a^{(3)}$ , y  $\square^{(3)}$  se refieren a  $g_{ab}^{(3)}$ . Es fácil comprobar que las rotaciones generadas por  $\sigma^a$  siguen siendo una simetría de la teoría reducida. En particular,  $\sigma^a$  está bien definido en la variedad cociente y se cumple

$$L_\sigma g_{ab}^{(3)} = 0, \quad L_\sigma \lambda = 0, \quad \text{y} \quad L_\sigma \phi = 0.$$

En este punto, aunque las rotaciones no actúan libremente, es posible seguir utilizando la técnica de reducción de Geroch en la variedad  $\tilde{\mathcal{M}}^3 = \mathcal{M}^3 \setminus \{\rho = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$  obtenida al extraer de  $\mathbb{R}^3$  el eje de simetría  $\rho = g_{ab}^{(3)} \sigma^a \sigma^b = 0$ . Los puntos del eje se añadirán al final del proceso imponiendo ciertas condiciones de regularidad [144]. Así pues, fuera del eje, podemos definir

$$\rho = g_{ab}^{(4)} \sigma^a \sigma^b = g_{ab}^{(3)} \sigma^a \sigma^b > 0 \quad \text{y} \quad g_{ab}^{(3)} = g_{ab}^{(2)} + \rho^{-1} \sigma_a \sigma_b.$$

Las ecuaciones (2.3) se pueden escribir, en la variedad lorentziana bidimensional cociente  $\mathcal{M}^2 = \tilde{\mathcal{M}}^3/U(1) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , de la forma:

$$\begin{aligned} \square^{(2)} \phi &= -\frac{1}{2} g^{(2)ab} (d\phi)_a (d \log(\lambda \rho))_b \\ \square^{(2)} \lambda &= -\frac{\lambda}{2} g^{(2)ab} (d \log \lambda)_a (d \log(\lambda^{-1} \rho))_b \\ \square^{(2)} \rho &= \frac{\rho}{2} g^{(2)ab} (d \log \rho)_a (d \log(\lambda^{-1} \rho))_b \\ R_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2\lambda} D_a^{(2)} (d\lambda)_b + \frac{1}{2\rho} D_a^{(2)} (d\rho)_b \\ &\quad - \frac{1}{4} (d \log \lambda)_a (d \log \lambda)_b - \frac{1}{4} (d \log \rho)_a (d \log \rho)_b + 8\pi G_N (d\phi)_a (d\phi)_b, \end{aligned} \quad (2.4)$$

<sup>2</sup>Aquí y en lo sucesivo  $\xi_a = g_{ab}^{(4)} \xi^b$  y  $\sigma_a = g_{ab}^{(4)} \sigma^b$ . Además, como las traslaciones actúan sin puntos fijos,  $\lambda > 0$ .

donde la notación es análoga a la utilizada anteriormente. Estas ecuaciones bidimensionales se pueden resolver en dos pasos. Primero reemplazamos el campo  $\rho$  en términos de  $\lambda$  y de un nuevo campo escalar  $R$  definido por

$$R = \sqrt{(g_{a_1 a_2}^{(4)} \xi^{a_1} \xi^{a_2}) (g_{b_1 b_2}^{(4)} \sigma^{b_1} \sigma^{b_2})} = \sqrt{\lambda \rho}.$$

Nótese que  $R$  puede interpretarse como la densidad de área de las órbitas del grupo de isometrías. Así, las ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \square^{(2)} \phi + g^{(2)ab} (d\phi)_a (d \log R)_b &= 0 \\ \square^{(2)} \log \lambda + g^{(2)ab} (d \log \lambda)_a (d \log R)_b &= 0 \\ \square^{(2)} R &= 0 \\ R_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{R} D_a^{(2)} (dR)_b - \frac{1}{2} [d \log \lambda]_a [d \log (\lambda^{-1} R^2)]_b + 8\pi G_N (d\phi)_a (d\phi)_b. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ahora, ya que estamos tratando con ecuaciones de campos en 2 dimensiones, el hecho de que  $\square^{(2)} R = 0$  nos permite introducir un nuevo campo escalar  $T$  (la función armónica conjugada de  $R$ ) como

$$(dT)_a = \epsilon_{ab}^{(2)} g^{(2)bc} (dR)_c,$$

donde  $\epsilon_{ab}^{(2)}$  es el elemento de volumen asociado a  $g_{ab}^{(2)}$ . Por otro lado, nos restringiremos a espacio-tiempos para los cuales la derivada  $(dR)_a$  es siempre de tipo espacio (con lo que  $(dT)_a$  será siempre de tipo tiempo).

De esta forma, podemos usar los campos  $R$  y  $T$  como coordenadas del espacio-tiempo en 1+1 dimensiones e introducir la métrica plana auxiliar

$$\eta_{ab}^{(2)} = -(dT)_a (dT)_b + (dR)_a (dR)_b.$$

Los grados de libertad efectivos de la métrica  $g_{ab}^{(2)}$  se encuentran en el factor conforme  $e^\gamma$  que relaciona  $g_{ab}^{(2)}$  y  $\eta_{ab}^{(2)}$  en la forma

$$g_{ab}^{(2)} = \frac{e^\gamma}{\lambda} \eta_{ab}^{(2)}.$$

En términos de estos nuevos campos, las ecuaciones (2.5) resultan ser

$$\begin{aligned} \square \phi + \eta^{(2)ab} (d\phi)_a (d \log R)_b &= 0 \\ \square \log \lambda + \eta^{(2)ab} (d \log \lambda)_a (d \log R)_b &= 0 \\ \eta^{(2)cd} \left[ \frac{1}{2} (d \log \lambda)_c (d \log \lambda)_d + 8\pi G_N (d\phi)_c (d\phi)_d - (d\gamma)_c (d \log R)_d \right] \eta_{ab}^{(2)} \\ &= \frac{2}{R} \partial_a (dR)_b - 2(d\gamma)_{(a} (d \log R)_{b)} + (d \log \lambda)_a (d \log \lambda)_b + 8\pi G_N (d\phi)_a (d\phi)_b, \end{aligned}$$

donde  $\partial_a$  es la conexión de Levi-Civita compatible con la métrica plana  $\eta_{ab}^{(2)}$  y  $\square$  es su correspondiente operador de d'Alembert. La solución general de estas ecuaciones se puede escribir de una forma más conveniente en términos de los nuevos campos escalares

$$\phi_0 := \log \lambda, \quad \phi_1 := \sqrt{16\pi G_N} \phi.$$

De hecho, utilizando las coordenadas  $R$  y  $T$ , las ecuaciones de Einstein son equivalentes a dos ecuaciones de Klein-Gordon con simetría cilíndrica desacopladas para  $\phi_0$  y  $\phi_1$  junto con dos ecuaciones en las que aparece el campo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} [-\partial_T^2 + \partial_R^2 + \frac{1}{R}\partial_R]\phi_I &= 0, \quad I = 0, 1. \\ \partial_T \gamma &= R \sum_I (\partial_R \phi_I)(\partial_T \phi_I), \\ \partial_R \gamma &= \frac{R}{2} \sum_I (\partial_T \phi_I)^2 + (\partial_R \phi_I)^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Las primeras dos ecuaciones describen dos campos escalares sin masa, con simetría cilíndrica, propagándose en un fondo minkowskiano auxiliar dado por la métrica  $\eta_{ab}^{(2)}$  y su solución es bien conocida. Las ecuaciones para  $\gamma$  satisfacen la condición de integrabilidad  $\partial_R \partial_T \gamma = \partial_T \partial_R \gamma$  que nos permite escribir su solución como la primitiva

$$\gamma = \frac{1}{2} \sum_I \int [(\partial_T \phi_I)^2 + (\partial_R \phi_I)^2] R dR. \tag{2.7}$$

El valor concreto de  $\gamma$  se obtendrá a partir de las condiciones asintóticas y de regularidad.

Es importante señalar que en la formulación 1+1 dimensional de las ecuaciones de Einstein que proporcionan las ecuaciones (2.6) intervienen tres campos escalares  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  y  $\gamma$ . Además, los campos  $\phi_0$  y  $\phi_1$  aparecen de una forma simétrica pese a que su origen es completamente distinto. En concreto, el campo  $\phi_0$  tiene un origen puramente geométrico mientras que  $\phi_1$  es un campo escalar que proviene de la reducción de simetría del campo de materia original. Por otra parte, es evidente que el proceso que hemos seguido para resolver las ecuaciones de Einstein es independiente del número de campos escalares sin masa que se introduzcan en la formulación 3+1 dimensional de partida. Debido a este hecho, hemos introducido el subíndice  $I$  para referirnos a los campos escalares  $\phi_I$ . Dicho índice tomará los valores  $I = 0, 1, \dots, n$ , donde  $I = 0$  hará referencia al escalar de origen geométrico y los valores  $I = 1, \dots, n$  se referirán a los campos de materia.

El campo escalar  $\gamma$  está relacionado con el concepto de “C-energía” introducido por K. S. Thorne para sistemas en relatividad general con simetría cilíndrica [145]. En nuestro caso, la expresión para la C-energía sugiere que el Hamiltoniano del sistema se puede obtener a

partir del correspondiente a dos campos escalares libres axisimétricos tal y como se verá en la siguiente sección.

Finalmente, las métricas en 4 dimensiones que satisfacen las ecuaciones de Einstein (2.1,2.2) se pueden escribir a partir de las soluciones de las ecuaciones anteriores como

$$g_{ab}^{(4)} = e^{\gamma - \phi_0} \left[ - (dT)_a (dT)_b + (dR)_a (dR)_b \right] + R^2 e^{-\phi_0} (d\sigma)_a (d\sigma)_b + e^{\phi_0} (dz)_a (dz)_b,$$

donde hemos escrito los vectores de Killing de la forma  $\xi^a = (\partial/\partial z)^a$  y  $\sigma^a = (\partial/\partial \sigma)^a$ .

## 2.2. Hamiltoniano en 2+1 dimensiones

Para desarrollar el formalismo Hamiltoniano nuestro punto de partida es la acción de Einstein-Hilbert en 4 dimensiones para gravedad acoplada con una familia de campos escalares sin masa con simetría cilíndrica  $\phi_I$ :

$$\begin{aligned} S^{(4)} = & \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}_r^3 \times Z} |g^{(4)}|^{1/2} \left( R^{(4)} - \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n g^{(4)ab} (d\phi_I)_a (d\phi_I)_b \right) \\ & + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial(\mathcal{M}_r^3 \times Z)} (|h^{(3)}|^{1/2} K - |h^{(3)0}|^{1/2} K^0). \end{aligned}$$

Hemos incluido en la acción los términos de superficie necesarios para tener un principio variacional bien definido [96]. Como ya hemos comentado anteriormente, los campos se toman suaves (en particular regulares en el eje) y las condiciones de frontera en el infinito, que haremos explícitas más adelante, son las que corresponden a la definición de planitud asintótica introducida por A. Ashtekar y M. Varadarajan para el caso 2+1 dimensional [132]. La variedad 4 dimensional sobre la que se define la acción anterior tiene la forma de un producto  $\mathcal{M}_r^3 \times Z$ , donde  $\mathcal{M}_r^3 \subset \mathcal{M}^3 = \mathbb{R}^3$  es una variedad tridimensional, compacta, con borde y ortogonal al vector de Killing traslacional  $\xi^a = (\partial/\partial z)^a$ ; y  $Z = [z_1, z_2]$  es un intervalo cerrado en la dirección del eje de simetría. Hemos introducido también la métrica de referencia asintóticamente plana  $g_{ab}^{(4)0}$  que, al desarrollar el formalismo Hamiltoniano, nos proveerá de un origen para la energía, que será cero para Minkowski. Finalmente,  $h_{ab}^{(3)}$  y  $h_{ab}^{(3)0}$  son las métricas inducidas por  $g_{ab}^{(4)}$  y  $g_{ab}^{(4)0}$  en la frontera  $\partial(\mathcal{M}_r^3 \times Z)$ .

Haciendo uso del método de reducción de Geroch [133] con respecto al vector de Killing traslacional  $\xi^a$ , es posible reescribir la acción en 3+1 dimensiones anterior como otra acción equivalente en 2+1 dimensiones que, tras hacer la transformación conforme  $g_{ab} = e^{\phi_0} g_{ab}^{(3)}$ , tiene la forma de la acción de Einstein-Hilbert para gravedad acoplada a los campos escalares

$\phi_0$  y  $\phi_I$ ,  $I = 1, \dots, n$ . Es decir, la acción de la que obtendremos el Hamiltoniano es:

$$S^{(3)} = \frac{1}{16\pi G_3} \int_{\mathcal{M}_r^3} |g|^{1/2} \left( R^{(3)} - \frac{1}{2} \sum_{I=0}^n g^{ab} (d\phi_I)_a (d\phi_I)_b \right) + \frac{1}{8\pi G_3} \int_{\partial\mathcal{M}_r^3} (|h|^{1/2} K - |h^0|^{1/2} K^0). \quad (2.8)$$

Todos los objetos geométricos de la expresión anterior se refieren a la métrica tridimensional  $g_{ab}$ . La constante de acoplo  $G_3$  es la constante de Newton por unidad de longitud en el eje ( $G_3 = G_N/(z_2 - z_1)$ ) y, en lo sucesivo, elegimos unidades de forma que  $c = 1$ . En esta expresión tridimensional de la acción, como ya sugería la expresión de  $\gamma$  (2.7), se puede apreciar que el término correspondiente al campo escalar geométrico toma la misma forma que el de los campos de materia. Este hecho es el responsable del papel simétrico que juegan estos campos en la formulación final del modelo, tal y como veremos al desarrollar el formalismo Hamiltoniano. Vemos también que los términos correspondientes a los campos escalares están acoplados (todos ellos dependen de la métrica y, a su vez, la métrica depende de ellos) aunque el acoplo no sea *directo*, ya que no hay términos cruzados en la acción.

Para desarrollar el formalismo Hamiltoniano, seguiremos el método propuesto por A. Ashtekar y M. Pierri en [131], donde se considera este problema para el caso en vacío. Tomamos la métrica de Minkowski en 2+1 dimensiones como la métrica de referencia en la región asintótica de  $\mathcal{M}^3 = \mathbb{R}^3$

$$\dot{g}_{ab} = -(dt)_a(dt)_b + (dr)_a(dr)_b + r^2(d\sigma)_a(d\sigma)_b,$$

donde hemos introducido los vectores coordenados de la métrica minkowskiana dados por

$$t^a = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \quad \sigma^a = \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} \right)^a, \quad r^a = \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^a.$$

El vector  $t^a$ , que es un Killing temporal de la métrica de referencia  $\dot{g}_{ab}$ , será un Killing asintótico de las métricas  $g_{ab}$  que nos disponemos a estudiar. Por otra parte, el vector de Killing rotacional  $\sigma^a$  es un vector de Killing tanto de  $\dot{g}_{ab}$  como de  $g_{ab}$  en todo el espacio. El sistema de vectores  $(t^a, r^a, \sigma^a)$  nos define unas coordenadas en todo  $\mathbb{R}^3$  menos en el eje, adaptadas a la métrica plana  $\dot{g}_{ab}$  de la región asintótica espacial. En particular, la coordenada  $r$  mide la distancia radial al eje de simetría definida por la métrica asintótica.

Construimos ahora la métrica  $g_{ab}$  a partir de un sistema de vectores ortogonales  $(n^a, \hat{r}^a, \sigma^a)$  de la forma

$$g_{ab} = -n_a n_b + \hat{r}_a \hat{r}_b + \frac{1}{R^2} \sigma_a \sigma_b$$

con  $R^2 = g_{ab} \sigma^a \sigma^b$  y  $\sigma_a = g_{ab} \sigma^b$ . La relación entre los sistemas  $(t^a, r^a, \sigma^a)$  y  $(n^a, \hat{r}^a, \sigma^a)$

introducidos anteriormente es la siguiente:

$$t^a = Nn^a + N^r \hat{r}^a, \quad (2.9)$$

$$r^a = e^{\gamma/2} \hat{r}^a, \quad (2.10)$$

donde  $N$  es el lapso temporal y  $N^r$  es el *shift*. Nótese que a partir de dichas relaciones podemos obtener condiciones de consistencia que se han de satisfacer debido a que  $(t^a, r^a, \sigma^a)$  es un sistema de vectores coordinados, en particular, sus conmutadores han de anularse. De este modo se obtiene:

$$\begin{aligned} L_\sigma N &= 0, \quad L_\sigma N^r = 0, \quad L_\sigma \gamma = 0, \\ [\sigma, \hat{r}]^a &= 0, \quad [\sigma, n]^a = 0, \\ n^a N' + \hat{r}^a (N^{r'} - \frac{\dot{\gamma}}{2} e^{\gamma/2}) + N e^{\gamma/2} [\hat{r}, n]^a &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $\dot{f} := t^a (df)_a$ ,  $f' := r^a (df)_a$ . Queremos hacer notar que, a pesar de que la última condición involucra derivadas temporales, en ningún caso debe ser tomada como una ecuación de la dinámica, sino como una condición de consistencia sobre el conmutador  $[\hat{r}, n]^a$ .

Finalmente, la métrica tiene la forma:

$$g_{ab} = (N^{r2} - N^2)(dt)_a(dt)_b + 2e^{\gamma/2} N^r (dt)_a(dr)_b + e^\gamma (dr)_a(dr)_b + R^2 (d\sigma)_a(d\sigma)_b.$$

Para llegar al formalismo Hamiltoniano a partir de la acción (2.8) y controlar el comportamiento asintótico de los campos seguiremos un proceso similar al desarrollado en [94,97]. Para ello consideraremos una familia uniparamétrica de 3-variedades compactas y con borde  $\mathcal{M}_r^3$  que cumplan  $r_1 < r'_2 \Rightarrow \mathcal{M}_{r_1}^3 \subset \mathcal{M}_{r_2}^3$ , y tal que la unión de todas ellas sea el espacio-tiempo total  $\bigcup_r \mathcal{M}_r^3 = [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{M}^3$ . De esta forma, cada una de las variedades de la familia funciona como un *cut-off* del espacio-tiempo. Después, tomaremos el límite  $r \rightarrow \infty$ . En nuestro caso elegiremos como parámetro de la familia la coordenada radial de la métrica asintótica  $\hat{g}_{ab}$ , es decir, trasladaremos la frontera al infinito en la dirección dada por  $r$ . Utilizando la forma explícita de la métrica y tomando como frontera  $\partial \mathcal{M}_r^3$  un cilindro con las *tapas* ortogonales al vector  $n^a$  y con superficie lateral ortogonal a  $\hat{r}^a$ , llegamos a la siguiente expresión para la acción en 2+1 dimensiones en términos de los campos  $N$ ,  $N^r$ ,



$\gamma$ ,  $R$ , y  $\phi_I$ :

$$\begin{aligned}
S^{(3)} &= \frac{1}{16\pi G_3} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_{\tilde{r}}^3} |g|^{1/2} \left( R^{(3)} - \frac{1}{2} \sum_{I=0}^n g^{ab} (d\phi_I)_a (d\phi_I)_b \right) \\
&\quad + \frac{1}{8\pi G_3} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathcal{M}_{\tilde{r}}^3} (|h|^{1/2} K - |h^0|^{1/2} K^0) \\
&= \frac{1}{8G_3} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\tilde{r}} \left( N e^{-\gamma/2} (\gamma' R' - 2R'') - \frac{1}{N} (e^{\gamma/2} \dot{\gamma} - 2N^{r'}) (\dot{R} - e^{-\gamma/2} N^r R') \right. \\
&\quad \left. + \frac{R}{2N} \sum_{I=0}^n \left[ e^{\gamma/2} \dot{\phi}_I^2 - 2N^r \dot{\phi}_I \phi_I' + e^{-\gamma/2} (N^{r^2} - N^2) \phi_I'^2 \right] \right) dr dt \\
&\quad + \frac{1}{4G_3} \int_{t_1}^{t_2} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} (N e^{-\gamma/2} R' - 1) dt.
\end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior, mediante una transformación de Legendre, hallamos el Hamiltoniano. Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4G_3} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} (1 - N R' e^{-\gamma/2}) \\
&\quad + \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \int_0^{\tilde{r}} dr \left\{ N e^{-\gamma/2} \left[ \frac{1}{8G_3} (2R'' - \gamma' R') - 8G_3 p_R p_\gamma + \sum_{I=0}^n \left( \frac{4G_3}{R} p_I^2 + \frac{R}{16G_3} \phi_I'^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + N^r e^{-\gamma/2} \left[ p_R R' - 2p_\gamma' + p_\gamma \gamma' + \sum_{I=0}^n \phi_I' p_I \right] \right\},
\end{aligned}$$

donde  $p_R, p_\gamma, p_I$  son los momentos canónicamente conjugados a  $R, \gamma, \phi_I$ . Los campos y sus momentos conjugados satisfacen las siguientes condiciones que garantizan la planitud asintótica y la regularidad en el eje (recordamos que nuestra métrica se reduce a Minkowski cuando  $N = 1$ ,  $N^r = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $R = r$ )

Campo	$r \rightarrow \infty$ (Infinito)	$r \rightarrow 0$ (Eje)
$R$	$r + \mathbf{O}(r^{-\epsilon})$	$r + \mathbf{O}(r^3)$
$\gamma$	$\gamma_\infty + \mathbf{O}(r^{-\epsilon})$	$\mathbf{O}(r^2)$
$\phi_I$	$\mathbf{O}(r^{-\epsilon})$	$\phi_I^0 + \mathbf{O}(r^2)$
$N$	$1 + \mathbf{O}(r^{-\epsilon})$	$N_0 + \mathbf{O}(r^2)$
$N^r$	$\mathbf{O}(r^{-\epsilon})$	$\mathbf{O}(r^2)$
$p_R$	$\mathbf{O}(r^{-1})$	$\mathbf{O}(r)$
$p_\gamma$	$\mathbf{O}(r^{-(1+\epsilon)})$	$\mathbf{O}(r^2)$
$p_I$	$\mathbf{O}(r^{-1})$	$\mathbf{O}(r)$

con  $\phi_I^0$  y  $N_0$  constantes y  $\epsilon > 0$ . Observamos que, aunque las condiciones impuestas sobre los campos  $N, N^r, R$  y  $\phi_I$  son las esperadas, la condición sobre el campo  $\gamma$  no implica que

$\gamma$  se aproxime a cero en el infinito, lo que hace que la métrica en la región asintótica no sea exactamente Minkowski sino que tenga un defecto angular, tal y como se aprecia en la siguiente comparación:

$$\begin{aligned} g_{ab} &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + \exp(\gamma_\infty)(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b + r^2(\mathrm{d}\sigma)_a(\mathrm{d}\sigma)_b, \\ g_{ab}^0 &= -(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + (\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b + r^2(\mathrm{d}\sigma)_a(\mathrm{d}\sigma)_b. \end{aligned}$$

Posteriormente, cuando completemos el formalismo Hamiltoniano, veremos que este defecto angular está relacionado con la energía ADM del sistema en 2+1 dimensiones. A medida que consideramos energías más bajas, el defecto angular disminuye y la métrica en la región asintótica se va aproximando a la de Minkowski.

Teniendo en cuenta las condiciones asintóticas dadas es posible tomar el límite  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  para obtener finalmente el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{4G_3}(1 - e^{-\gamma_\infty/2}) + \int_0^\infty (NC + N^r C^r) \mathrm{d}r,$$

donde  $C$  y  $C^r$  son las ligaduras

$$\begin{aligned} C &= e^{-\gamma/2} \left[ \frac{1}{8G_3} (2R'' - \gamma' R') - 8G_3 p_R p_\gamma + \sum_{I=0}^n \left( \frac{4G_3}{R} p_I^2 + \frac{R}{16G_3} \phi_I'^2 \right) \right], \\ C^r &= e^{-\gamma/2} \left[ p_R R' - 2p_\gamma' + p_\gamma \gamma' + \sum_{I=0}^n \phi_I' p_I \right]. \end{aligned}$$

Como vemos, el Hamiltoniano consta de un término que contiene a las ligaduras típicas de relatividad general (que tendrá contribución nula) y otro término no nulo proveniente de los términos de frontera de la acción. Como es habitual, la ligadura  $C^r$  genera los difeomorfismos radiales mientras que  $C$  (junto con  $C^r$ ) contribuye a los difeomorfismos temporales, por lo que la teoría presenta un grupo de *gauge*.

Para continuar, fijamos el *gauge* de la misma forma que en el caso sin materia [131]

$$R(r) = r, \quad p_\gamma(r) = 0.$$

Se comprueba que las condiciones de fijación de *gauge* son admisibles calculando los paréntesis de Poisson de las mismas con las ligaduras y observando que no se anulan [168]. Por otro lado, debemos elegir el *lapse*  $N$  y el *shift*  $N^r$  de forma que la evolución generada por el Hamiltoniano preserve las condiciones de *gauge*, es decir, de forma que la imagen bajo evolución de cualquier punto sobre la superficie de las ligaduras que cumpla las condiciones de *gauge* siga cumpliéndolas siempre. Calculemos entonces los paréntesis de Poisson de la

condición de fijación de *gauge* con el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \{R(r) - r, H[N, N^r]\} &\approx N^r e^{-\gamma}, \\ \{p_\gamma(r), H[N, N^r]\} &\approx \frac{e^{-\gamma/2}}{8G_3} \left[ \frac{N}{4r} \sum_{I=0}^n \left( (8G_3 p_I)^2 + r^2 \phi_I'^2 \right) - N' \right], \end{aligned}$$

y busquemos las condiciones para que se anulen. Como es habitual “ $\approx$ ” denota igualdad módulo las condiciones de *gauge* y las ligaduras. Las únicas soluciones que satisfacen las condiciones de contorno en el infinito y en el eje, y que hacen que los paréntesis anteriores se anulen son:

$$\begin{aligned} N^r(\tilde{r}) &= 0, \\ N(\tilde{r}) &= \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_{I=0}^n \int_{\tilde{r}}^{\infty} dr r \left( \frac{(8G_3 p_I)^2}{r^2} + \phi_I'^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por otro lado, podemos resolver las ligaduras y obtener expresiones para  $\gamma$  y  $p_R$  en función de  $\phi_I$  y  $p_I$ :

$$\begin{aligned} \gamma(\tilde{r}) &= \frac{1}{2} \sum_{I=0}^n \int_0^{\tilde{r}} dr r \left( \frac{(8G_3 p_I)^2}{r^2} + \phi_I'^2 \right), \\ p_R &= - \sum_{I=0}^n p_I \phi_I'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El espacio de fases reducido está formado, por tanto, por los campos dinámicos  $\phi_I$  y sus momentos canónicamente conjugados  $p_I$ . El Hamiltoniano reducido vendrá dado por

$$H = \frac{1}{4G_3} (1 - e^{-\gamma_\infty/2}), \quad (2.14)$$

donde  $\gamma_\infty$  es

$$\gamma_\infty = \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \gamma(\tilde{r}) = \frac{1}{2} \sum_{I=0}^n \int_0^\infty dr r \left( \frac{(8G_3 p_I)^2}{r^2} + \phi_I'^2 \right). \quad (2.15)$$

Se observa que  $\gamma_\infty$  es el Hamiltoniano de un sistema de  $n$  campos escalares libres y axi-simétricos en 2+1 dimensiones propagándose en un fondo minkowskiano. El Hamiltoniano  $H$  de nuestro sistema es, por tanto, una función no negativa, no lineal y acotada de ese Hamiltoniano libre (nótese que  $H$  alcanza un valor máximo de  $1/(4G_3)$ ). La forma del Hamiltoniano pone de manifiesto que nos encontramos en un sistema en interacción, si bien se trata de una interacción *no local* en su versión Lagrangiana (la interacción proviene del término de frontera de la acción).

Finalmente, la métrica se puede escribir de la forma

$$g_{ab} = e^{\gamma(R,t)} \left[ -e^{-\gamma_\infty} (dt)_a (dt)_b + (dR)_a (dR)_b \right] + R^2 (d\sigma)_a (d\sigma)_b.$$

A partir del Hamiltoniano (2.14) podemos plantear las ecuaciones del movimiento de nuestro sistema:

$$\dot{\phi}_I = \frac{\delta H}{\delta p_I} = e^{-\gamma_\infty/2} \frac{(8G_3 p_I)}{r}, \quad (2.16a)$$

$$\dot{p}_I = -\frac{\delta H}{\delta \phi_I} = \frac{1}{8G_3} e^{-\gamma_\infty/2} (r \phi_I')'. \quad (2.16b)$$

Éstas son unas ecuaciones integro-diferenciales no lineales que, a priori, aparentan ser difícilmente resolubles. Sin embargo, un rápido cálculo demuestra que  $\gamma_\infty$  es una constante del movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_\infty &= \sum_{I=0}^n \int_0^\infty dr \frac{1}{r} (8G_3 p_I \delta G_3 \dot{p}_I + r^2 \phi_I' \dot{\phi}_I') \\ &= 8G_3 e^{-\gamma_\infty/2} \int_0^\infty dr \sum_{I=0}^n (p_I \phi_I')' = -8G_3 e^{-\gamma_\infty/2} \int_0^\infty dr p_R' = 0, \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de las ecuaciones del movimiento y del comportamiento asintótico y en el eje de  $p_R$ . Entonces, para cada solución, podemos realizar un cambio en la variable temporal de la forma siguiente:

$$T = e^{-\gamma_\infty/2} t.$$

Con este cambio, las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir de la forma:

$$\partial_T^2 \phi_I - \phi_I'' - \frac{1}{r} \phi_I' = 0. \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones, que ya habíamos deducido en la sección anterior trabajando directamente sobre las ecuaciones de Einstein, describen la evolución de una familia de campos escalares sin masa con simetría cilíndrica en 2+1 dimensiones con la métrica de Minkowski.

Las soluciones de las ecuaciones (2.17) son de la forma:

$$\phi_I(r, T) = \int_0^\infty J_0(kr) (\exp(-ikT) a_I(k) + \exp(ikT) \bar{a}_I(k)) dk, \quad (2.18)$$

donde  $a_I(k)$  son funciones arbitrarias, relacionadas con las condiciones iniciales,  $\bar{a}_I(k)$  denota la función compleja conjugada de  $a_I(k)$  y, dado que  $\phi_I(r, T) \in \mathbb{R}$ , se cumple que  $\bar{a}_I(-k) = a_I(k)$ . Si ahora deshacemos el cambio de variable temporal tenemos la siguiente forma para las soluciones:

$$\phi_I(r, t) = \int_0^\infty J_0(kr) (\exp(-ikte^{-\gamma_\infty/2}) a_I(k) + \exp(ikte^{-\gamma_\infty/2}) \bar{a}_I(k)) dk,$$

donde, haciendo uso de la ecuación (2.15), el valor de  $\gamma_\infty = \gamma_\infty(a_0, a_1, \dots, a_n)$  viene fijado por las condiciones iniciales:

$$\gamma_\infty = 2 \cdot \sum_{I=0}^n \int_0^\infty k |a_I(k)|^2 dk.$$

Es importante señalar que los campos  $\phi_I$  se encuentran sujetos a una interacción no local, debida a la particular forma del Hamiltoniano (2.14). La interacción desaparece cuando se considera el cambio de variable temporal  $T(a_0, a_1, \dots, a_n) = e^{-\gamma_\infty(a_0, a_1, \dots, a_n)/2t}$  cuyo efecto es el de desacoplar las ecuaciones del movimiento. Subrayamos que  $\gamma_\infty$  es constante para cada solución pero cambia de una a otra, por lo que el cambio de coordenada temporal será diferente para cada una de ellas.

En conclusión, el hecho de que el Hamiltoniano sea una función de un Hamiltoniano libre hace que este modelo pueda ser tratado exactamente, aunque presente comportamientos no triviales debidos a que es un sistema acoplado (no local).



## Capítulo 3

# Cuantización de Fock

Las soluciones de las ecuaciones de Einstein para un sistema gravitatorio con simetría cilíndrica acoplado a campos escalares sin masa que hemos encontrado en el capítulo anterior no son estacionarias. Dichos espacio-tiempos no poseen ningún campo de Killing temporal globalmente definido por lo que, en principio, esperaríamos complicaciones a la hora de su cuantización. En el caso de espacio-tiempos estacionarios es posible usar el Killing temporal para seleccionar unas soluciones privilegiadas (denominadas de *frecuencia positiva*), y definir el espacio de Hilbert de una partícula como el espacio generado por este tipo de soluciones. Sin embargo, en una situación no estacionaria, en general, no existe una elección favorecida del espacio de Hilbert de una partícula a partir del cual construir el espacio de Fock de la teoría [37–39].

Sin embargo, en nuestro caso, nos hemos centrado en el estudio de las soluciones asintóticamente planas. Como ya se ha comentado anteriormente, el concepto de planitud asintótica en 2+1 dimensiones no obliga a que la métrica en la región asintótica tienda exactamente a la de Minkowski, sino que se permite un defecto angular. En cualquier caso, en dicha región se dispone de un vector de Killing asintótico de género tiempo  $(\partial/\partial t)^a$  y es posible utilizar este vector para definir una función de tiempo global  $t$  con la que desarrollar el formalismo Hamiltoniano. La formulación Hamiltoniana construida de esta forma conduce, como ya se ha visto, a un Hamiltoniano que es función de un Hamiltoniano libre. Así pues, para llevar a cabo la cuantización, tomaremos como espacio de Hilbert de una partícula el correspondiente a un campo escalar con simetría axial en Minkowski. Esta construcción nos permitirá privilegiar una cuantización de Fock frente a las demás pese a estar tratando con un sistema no-estacionario desde el punto de vista de la relatividad general. Además, el vacío de Fock  $|\Omega\rangle$  construido de esta manera cumplirá una serie de propiedades interesantes que facilitarán nuestra tarea. En primer lugar,  $|\Omega\rangle$  será autoestado de mínima energía del

Hamiltoniano, con  $\hat{H}|\Omega\rangle = 0$ . Como veremos, la causa de este hecho está en la elección que hicimos en el desarrollo clásico según la cual fijábamos el origen de energía de forma que al espacio-tiempo de Minkowski le correspondía una energía nula. De esta forma, el vacío será invariante bajo la evolución generada por el Hamiltoniano físico del sistema  $\hat{H}$ , es decir  $e^{i\hat{H}t}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$ .

### 3.1. Construcción de Fock para el campo axial en Minkowski

El espacio de fases reducido para las ondas de Einstein-Rosen acopladas con campos de materia está descrito por pares canónicos de la forma  $(\phi_I, p_I)$  y en él la dinámica se encuentra regida por el Hamiltoniano (2.14). Con objeto de preparar la posterior cuantización, y dado que el Hamiltoniano físico es una función del Hamiltoniano auxiliar libre  $H_0 = \gamma_\infty$ , detallaremos en primer lugar la construcción del espacio de Fock para un campo escalar sin masa con simetría axial en Minkowski. Para ello, introducimos el espacio lineal  $\mathcal{C} \subset C^\infty([0, \infty))$  formado por las funciones reales, suaves y de decaimiento rápido en  $[0, \infty)$ , que admiten un desarrollo de Taylor alrededor de  $r = 0$  de la forma  $\sum_{n=0}^\infty a_{2n} r^{2n}$ . Esta condición nos garantiza la analiticidad de la función escalar en el eje. Usando  $\mathcal{C}$  es posible definir con rigor el espacio de fases  $\Upsilon = (\mathcal{P}, \omega)$  de un campo escalar libre, con simetría axial, definido en un espacio de Minkowski 2+1 dimensional. En concreto,  $\mathcal{P} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  y  $\omega$  es la estructura simpléctica (débil)

$$\omega((Q_1, P_1), (Q_2, P_2)) := \int_0^\infty (Q_2(r)P_1(r) - Q_1(r)P_2(r)) r dr. \quad (3.1)$$

En lo que sigue denotaremos mediante  $(Q, P) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  a los puntos del espacio de fases.

La descripción de la dinámica clásica para el campo escalar libre viene dada por el sistema Hamiltoniano  $(\Upsilon, \omega, H_0)$ , con

$$H_0(Q, P) := \frac{1}{2} \int_0^\infty (P^2(r) + Q'^2(r)) r dr. \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de Hamilton libres que se derivan del mismo son

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= P, \\ \dot{P} &= \Delta Q, \end{aligned}$$

donde  $\Delta$  denota el Laplaciano  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  que actúa como

$$(\Delta F)(r) := F''(r) + \frac{F'(r)}{r}.$$



El término  $1/r$  en la expresión anterior proviene del uso de coordenadas polares adaptadas a la simetría axial del sistema.

Podemos usar el operador  $\Theta = -\Delta$  para definir una estructura compleja  $J : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  en el espacio de fases canónico mediante

$$J \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{\Theta} \\ \sqrt{\Theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Nótese que el dominio  $\mathcal{C}$  en el que hemos definido  $\Theta$  es denso en  $L^2([0, \infty), r dr)$ . Además, es posible demostrar que  $\Theta$  es autoadjunto y no negativo<sup>1</sup>. Esta estructura compleja se puede utilizar para construir un espacio vectorial complejo  $\Upsilon_J$  cuyos puntos son exactamente los mismos que los de  $\Upsilon$  y en el que la multiplicación por números complejos  $x + iy \in \mathbb{C}$  está definida por

$$(x + iy)(Q, P) := x(Q, P) + yJ(Q, P).$$

Asimismo, es posible combinar  $\omega$  y  $J$  para definir un producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_J : \Upsilon_J \times \Upsilon_J &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle (Q_1, P_1), (Q_2, P_2) \rangle_J &= \frac{1}{2}\omega(J(Q_1, P_1), (Q_2, P_2)) - \frac{i}{2}\omega((Q_1, P_1), (Q_2, P_2)). \end{aligned}$$

El espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_J$  del campo escalar axisimétrico en Minkowski es la completación de Cauchy de  $(\Upsilon_J, \langle \cdot, \cdot \rangle_J)$ .

A continuación describiremos otra construcción del espacio de Hilbert de una partícula que utiliza como punto de partida  $\Upsilon_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  –el  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial obtenido a partir de  $\Upsilon$  utilizando funciones complejas en  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}} \subset C_0^\infty([0, \infty), \mathbb{C})$ – que será más conveniente para nuestros propósitos. La estructura compleja (3.3) es diagonalizable en  $\Upsilon_{\mathbb{C}}$ , de hecho, los vectores

$$(C, \mp i\sqrt{\Theta}C) \in \Upsilon_{\mathbb{C}}, \quad C \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}},$$

son autovectores de  $J$  con autovalores  $\pm i$ . Por tanto, podemos escribir  $\Upsilon_{\mathbb{C}}$  como la suma directa  $\Upsilon_{\mathbb{C}} = \Upsilon_+ \oplus \Upsilon_-$ , donde

$$\Upsilon_{\pm} := \{(C, \mp i\sqrt{\Theta}C) \in \Upsilon_{\mathbb{C}} \mid C \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}\}$$

son los espacios de soluciones de *frecuencia positiva* y *frecuencia negativa*. Es claro que  $\Upsilon_+ \cap \Upsilon_- = \{0\}$  y  $\tilde{\Upsilon}_+ = \Upsilon_-$  donde

$$\overline{(C, \mp i\sqrt{\Theta}C)} := (\bar{C}, \pm i\sqrt{\Theta}\bar{C}).$$

---

<sup>1</sup>Debido a que  $\Theta$  no cumple una desigualdad del tipo  $\Theta \geq m^2 \mathbb{I}$  con  $m > 0$ , es necesario restringir su dominio para dar sentido a  $1/\sqrt{\Theta}$ . Para ello, basta considerar funciones cuya transformada de Fourier se anule en un entorno del cero.

Además, dado un punto  $(Q, P) \in \Upsilon$  existe un único  $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ , definido por

$$C = \frac{1}{2} \left( Q + i\Theta^{-\frac{1}{2}} P \right),$$

tal que

$$(Q, P) = (C, -i\sqrt{\Theta}C) + \overline{(C, -i\sqrt{\Theta}C)}. \quad (3.4)$$

En la ecuación anterior se observa que dada la primera componente  $C = \frac{1}{2}(Q + i\Theta^{-\frac{1}{2}}P)$  de  $(C, -i\sqrt{\Theta}C) \in \Upsilon_+$ , la otra queda determinada unívocamente. Por tanto, el espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_J$  puede ser descrito en términos de las funciones complejas  $C$  utilizando la siguiente identificación  $\kappa : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ :

$$\begin{aligned} C &= \kappa(Q, P) := \frac{1}{2} \left( Q + i\Theta^{-\frac{1}{2}} P \right), \\ (Q, P) &= \kappa^{-1}C = (C + \bar{C}, -i\sqrt{\Theta}(C - \bar{C})). \end{aligned}$$

La aplicación  $\kappa$  está adaptada a la forma compleja  $J$  en el sentido de que si  $\kappa(Q, P) = C$ , entonces  $\kappa \circ J(Q, P) = iC$ . Por tanto, el espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} = \{C : \|C\|^2 = \langle C, C \rangle < \infty\}$$

donde

$$\langle C_1, C_2 \rangle := \frac{1}{2} \omega(J\kappa^{-1}C_1, \kappa^{-1}C_2) - \frac{i}{2} \omega(\kappa^{-1}C_1, \kappa^{-1}C_2)$$

es completamente equivalente al espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_J$ . En primer lugar es importante señalar que, al igual que ocurría en  $\mathcal{H}_J$ , la estructura compleja es diagonal,  $JC = iC$  para todo  $C \in \mathcal{H}$ . Por otra parte, el Hamiltoniano clásico  $H_0$  admite una escritura sencilla en términos del operador  $\Theta$  y del producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathcal{H}$ :

$$H_0(\kappa^{-1}C) = \|\Theta^{\frac{1}{4}}C\|^2 = \langle C, \sqrt{\Theta}C \rangle.$$

Por último, resulta útil observar que el producto escalar de  $\mathcal{H}$  se puede escribir mediante

$$\langle C_1, C_2 \rangle = 2 \langle C_1, \sqrt{\Theta}C_2 \rangle_{L^2}$$

en términos del producto escalar usual en  $L^2((0, \infty), r dr)$

$$\langle C_1, C_2 \rangle_{L^2} := \int_0^\infty \overline{C_1(r)} C_2(r) r dr.$$

Con el fin de conectar con los formalismos habituales usados en física de partículas, es conveniente trabajar con una descomposición en modos de los vectores de nuestro espacio

de Hilbert que se encuentre adaptada a la simetría axial del sistema. Así, dada cualquier función  $F \in \mathcal{C}$  ó  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ , utilizaremos la siguiente descomposición en modos de tipo Fourier

$$F(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty f(w) J_0(wr) dw ,$$

donde los modos  $f(\omega)$  que utilizamos aquí están relacionados con la auténtica transformada de Fourier bidimensional  $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})$  de la forma:  $f(\omega) = \sqrt{2} \omega \hat{f}(\omega)$ . Por tanto, las funciones  $f(\omega)/\omega$  son funciones  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  en  $(\omega_1, \omega_2)$  y de decaimiento rápido. Nótese, además, que  $f(0) = 0$ . La acción de  $\sqrt{\Theta}$  queda descrita de manera muy sencilla con esta representación:

$$(\sqrt{\Theta}F)(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty w f(w) J_0(wr) dw .$$

La relación  $\kappa$  entre las descripciones  $(Q, P)$  y  $C$  del espacio de Hilbert de una partícula se describe también de forma más sencilla. Dados

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty q(w) J_0(wr) dw \\ P(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty p(w) J_0(wr) dw \end{aligned}$$

entonces  $C = \kappa(Q, P)$  si puede ser expresada de la forma

$$C(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty c(w) J_0(wr) dw ,$$

donde

$$c(w) = \frac{1}{2} \left( q(w) + \frac{ip(w)}{w} \right) .$$

La expresión para el producto escalar también se simplifica en esta representación:

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \int_0^\infty \overline{c_1(w)} c_2(w) dw , \quad \|C\|^2 = \int_0^\infty |c(w)|^2 dw ,$$

así como el Hamiltoniano

$$H_0(\kappa^{-1}C) = \int_0^\infty w |c(w)|^2 dw .$$

Una vez que tenemos el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de una partícula, se construye el espacio de Fock de la forma usual

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}^{\otimes n} \quad \text{con} \quad \mathcal{H}^0 := \mathbb{C} .$$

Los bien conocidos métodos de *segunda cuantización* [169] permiten extender operadores definidos en dominios densos de  $\mathcal{H}$  a dominios densos de  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ . En concreto, si tenemos

un operador unitario  $\exp(iA) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  descrito en términos del operador autoadjunto  $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , es posible promover ambos operadores al espacio de Fock  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ . En particular, existe un operador autoadjunto

$$d\Gamma(A) : \mathcal{D}(d\Gamma(A)) \subset \mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$$

y un operador unitario

$$\Gamma(i \exp(A)) : \mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$$

tales que  $\Gamma(\exp(iA))$  es una extensión de  $\exp(iA)$ ,  $d\Gamma(A)$  es una extensión de  $A$ , y se cumple que  $\Gamma(i \exp(A)) = \exp(id\Gamma(A))$ .

La construcción es la siguiente. Dado  $A$ , autoadjunto en  $\mathcal{H}$  con dominio  $\mathcal{D}$ , es posible construir un operador autoadjunto (densamente definido) en  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$  usando los operadores  $A^{(n)}$  definidos en  $\mathcal{D}^{\otimes n} \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$  a partir de

$$\begin{aligned} A^{(0)} &:= 0 \\ A^{(n)} &:= A \otimes I \otimes \cdots \otimes I + I \otimes A \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes A. \end{aligned}$$

La *segunda cuantización* del operador  $A$  es el operador

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$$

cuyo dominio  $\mathcal{D}_A$ , formado por los vectores que pertenecen a  $\bigoplus_k^{n_0} \mathcal{D}^{\otimes k}$  para algún  $n_0$ , es denso en  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ .

Volviendo al problema del campo escalar, tal y como hemos visto, la energía libre clásica se obtiene a partir del operador  $\sqrt{\Theta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  mediante

$$H_0(C) = \langle C, \sqrt{\Theta} C \rangle.$$

Por tanto, la segunda cuantización del operador  $\sqrt{\Theta}$  nos permitirá construir el Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0$  en  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ ,

$$\hat{H}_0 := d\Gamma(\Theta^{\frac{1}{2}}). \quad (3.5)$$

De manera análoga, el operador unitario de evolución cuántico vendrá dado por la segunda cuantización de la evolución clásica

$$\hat{U}_0(t) := \Gamma\left(\exp(-it\sqrt{\Theta})\right) = \exp\left(-it d\Gamma(\sqrt{\Theta})\right) = \exp(-it\hat{H}_0).$$

Obsérvese que, dado  $C^{\otimes n} \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ , la acción de  $\hat{H}_0$  se lee de la fórmula

$$(\hat{H}_0 C^{\otimes n})(r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{2^{n/2}} \int_{[0, \infty)^n} (\omega_1 + \cdots + \omega_n) \prod_{j=1}^n c(\omega_j) J_0(\omega_j r_j) d\omega_j.$$

Además, para  $C \in \mathcal{H}$  en el dominio de  $\hat{H}_0$  se cumple que

$$\langle \hat{H}_0 \rangle_C = \int_0^\infty \omega |c(\omega)|^2 d\omega = H_0(C).$$

Es decir, el valor medio del operador  $\hat{H}_0$  en el estado  $C$  viene dado por el valor clásico de la energía del sistema con las condiciones iniciales definidas por  $C$ .

## 3.2. Cuantización de Fock de las ondas ER acopladas a un campo escalar

La descripción de la dinámica clásica en el espacio de fases reducido de las ondas de Einstein-Rosen puede realizarse en el espacio  $\Upsilon = (\mathcal{P}, \omega)$  definido en la sección anterior. Ésta viene descrita por el Hamiltoniano (2.14), que ahora, por conveniencia, escribimos de la forma<sup>2</sup>:

$$H(Q, P) = 2 - 2 \exp \left( -\frac{1}{2} H_0(Q, P) \right), \quad (3.6)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano libre

$$H_0(Q, P) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( P^2(r) + Q'^2(r) \right) r dr. \quad (3.7)$$

Las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= e^{-H_0(Q,P)/2} P, \\ \dot{P} &= e^{-H_0(Q,P)/2} \Delta Q, \end{aligned}$$

pueden ser reescritas en términos del campo complejo  $C = \frac{1}{2}(Q + i\Theta^{-\frac{1}{2}}P)$  en la forma

$$\dot{C}_t = -ie^{-H_0(\kappa^{-1}C)/2} \sqrt{\Theta} C_t.$$

Por tanto, la solución a tiempo  $t$  de las ecuaciones del movimiento con datos iniciales  $C_{t=0} = C$  es

$$C_t = \exp \left( -ite^{-H_0(\kappa^{-1}C)/2} \sqrt{\Theta} \right) C. \quad (3.8)$$

Señalamos que  $C_t$  depende de las condiciones iniciales de forma *no lineal*. Entonces, si denotamos por  $C_{1t}$ ,  $C_{2t}$ , y  $C_{(1+2)t}$  las soluciones correspondientes a los datos iniciales  $C_1$ ,

---

<sup>2</sup>Hemos tomado unidades  $8G_3 = 1$  para simplificar el argumento. Más tarde en esta misma sección introduciremos de nuevo esta constante para discutir el papel que juega en las ecuaciones.

$C_2$  y  $C_1 + C_2$  se verifica que  $C_{(1+2)t} \neq C_{1t} + C_{2t}$ . Por otro lado, a partir de la ecuación (3.8) vemos que la evolución no preserva el producto escalar en  $\mathcal{H}$ :

$$\langle C_{1t}, C_{2t} \rangle \neq \langle C_1, C_2 \rangle. \quad (3.9)$$

Sin embargo, sí que se verifica que

$$\|C_t\| = \|C\| \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esto no contradice (3.9) ya que  $C_t$  no depende linealmente de  $C$ .

El espacio de Fock que vamos a utilizar para cuantizar las ondas de Einstein-Rosen es el mismo que hemos construido anteriormente a partir del espacio de Hilbert de una partícula en Minkowski. Sin embargo, ahora nuestro Hamiltoniano es diferente (es una función no polinómica del libre). Para construir el operador Hamiltoniano de la teoría cuántica, utilizaremos el Hamiltoniano libre (3.5) y la relación funcional que existe entre  $H$  y  $H_0$ . En concreto,

$$H(Q, P) = E(H_0(Q, P)) := 2 - 2 \exp(-H_0(Q, P)/2) \quad \text{donde} \quad E(x) := 2 - 2 \exp(-x/2).$$

Los teoremas espectrales [169] garantizan que el operador

$$\hat{H} := E(\hat{H}_0)$$

está bien definido y es un operador autoadjunto en el espacio de Fock  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ . Es importante señalar que  $\hat{H}$  no corresponde a la segunda cuantización de ningún operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$ . En particular, pese a que la restricción de  $\hat{H}$  al espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}$  satisface  $\hat{H}|_{\mathcal{H}} = E(\sqrt{\Theta})$ , el Hamiltoniano cuántico  $\hat{H} \neq d\Gamma(E(\sqrt{\Theta}))$ . Por tanto, el operador unitario de evolución

$$\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H})$$

generado por  $\hat{H}$  no es la segunda cuantización de ningún operador unitario del espacio de Hilbert de una partícula. Esto era de esperar ya que, como hemos observado en la ecuación (3.8), la dinámica clásica del sistema completo (ondas de Einstein-Rosen) no está descrita por un operador unitario en  $\mathcal{H}$  y, de hecho, no viene definida por ningún operador lineal.

Una vez que hemos presentado el espacio de Fock y los operadores Hamiltoniano y de evolución de una forma rigurosa, utilizaremos ahora la notación más habitual de brackets e introduciremos los operadores de creación y aniquilación para construir el operador Hamiltoniano y el operador unitario de evolución. Así, definimos

$$\begin{aligned} |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(\omega \cdot) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(\omega r) \end{aligned}$$

y denotamos a los vectores del espacio de Hilbert de una partícula mediante

$$|C\rangle = \int_0^\infty d\omega c(\omega) |\omega\rangle \in \mathcal{H}.$$

Esto es ciertamente un abuso de notación puesto que las funciones  $|\omega\rangle(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(\omega r)$  no están en  $\mathcal{H}$ , sin embargo es una notación extendida por la bibliografía [36, 40] y por ello la adoptaremos aquí. La normalización considerada hace que

$$\langle \omega_1 | \omega_2 \rangle = \int_0^\infty \omega_1 J_0(\omega_1 r) J_0(\omega_2 r) r dr = \delta(\omega_1, \omega_2).$$

La construcción anterior puede ser generalizada sin esfuerzo para incorporar la presencia de más de un campo escalar (libre, sin masa, axisimétrico y propagándose en un fondo minkowskiano). En este caso, el espacio de Fock de la teoría cuántica  $\mathcal{F}$  se construye a partir del producto tensorial de los espacios de Fock  $\mathcal{F}_I$  asociados con cada uno de los campos escalares,  $\mathcal{F} = \bigotimes_I \mathcal{F}_I$ . Denotaremos por  $|0\rangle^I$ ,  $\hat{a}_I$  y  $\hat{a}_I^\dagger$  a los estados de vacío, operadores de aniquilación y de creación de cada uno de los espacios de Fock. Dichos objetos satisfacen las reglas usuales

$$\begin{aligned} \hat{a}_I^\dagger(\omega) |0\rangle^I &= |\omega\rangle^I, \\ [\hat{a}_I(\omega_1), \hat{a}_I^\dagger(\omega_2)] &= \delta(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Los operadores  $\hat{a}_I$  y  $\hat{a}_I^\dagger$  pueden ser extendidos al espacio de Fock completo  $\mathcal{F}$  trivialmente de la forma

$$\hat{A}_I(k) := \hat{a}_I(k) \otimes \left( \bigotimes_{J \neq I} \mathbb{I}_J \right) \quad \hat{A}_I^\dagger(k) := \hat{a}_I^\dagger(k) \otimes \left( \bigotimes_{J \neq I} \mathbb{I}_J \right),$$

donde  $\mathbb{I}_I$  es el operador identidad en cada uno de los espacios  $\mathcal{F}_I$ . De esta manera, podemos representar las reglas de conmutación canónicas

$$[\hat{\phi}_I(R_1), \hat{p}_J(R_2)] = i\hbar \delta(R_1, R_2) \delta_{IJ}$$

en el espacio de Hilbert  $\mathcal{F}$  y construir operadores campo  $\hat{\phi}_I(R)$  y momentos canónicamente conjugados  $\hat{p}_I(R)$  basándonos en las soluciones de la ecuación de ondas para un campo escalar en 2+1 dimensiones con simetría axial (2.18). Los operadores  $\hat{\phi}_I(R)$  y momento  $\hat{p}_I(R)$  quedan descritos ahora de la forma

$$\hat{\phi}_I(R) = \sqrt{4G_3\hbar} \int_0^\infty J_0(Rk) [\hat{A}_I(k) + \hat{A}_I^\dagger(k)] dk, \quad (3.10)$$

$$\hat{p}_I(R) = \frac{iR}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{4G_3}} \int_0^\infty k J_0(Rk) [\hat{A}_I^\dagger(k) - \hat{A}_I(k)] dk, \quad (3.11)$$

donde hemos introducido las constantes físicas  $\hbar$  y  $G_3$  para hacer explícitas las dimensiones de los campos.

Introduciendo las expresiones (3.10, 3.11) en la expresión del Hamiltoniano (2.14) y tomando orden normal –si no lo hiciéramos el Hamiltoniano sería constante– obtenemos el Hamiltoniano cuántico siguiente

$$\hat{H} = \frac{1}{4G_3} \left[ 1 - \exp \left( -4G_3\hbar \int_0^\infty k \sum_I \hat{A}_I^\dagger(k) \hat{A}_I(k) dk \right) \right]. \quad (3.12)$$

Este Hamiltoniano es, al igual que su análogo clásico, una función no lineal y acotada de la suma de Hamiltonianos

$$\hat{H}_0^I = \int_0^\infty k \hat{A}_I^\dagger(k) \hat{A}_I(k) dk$$

para campos escalares libres sin masa, con simetría cilíndrica, en 2+1 dimensiones y evolucionando en una geometría minkowskiana de fondo. Se puede comprobar que el estado de mínima energía del sistema es el vacío de Fock de  $\mathcal{F}$ , es decir,  $|\Omega\rangle = \bigotimes_I |0\rangle^I$ . Además, podemos construir estados con un número fijo de cuantos del tipo “gravitatorio” o de “materia” a partir de los operadores  $\hat{A}_I^\dagger(k)$  actuando sobre el vacío

$$|k\rangle_I = \hat{A}_I^\dagger(k) |\Omega\rangle.$$

Por otra parte, es importante notar que la suma  $\hat{H}_0 = \sum_I \hat{H}_0^I$  es un observable pero no es el generador de la evolución temporal del sistema, que vendrá dada por el Hamiltoniano físico (3.12). De esta forma, la expresión para el operador de evolución es:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left( - \frac{i(t - t_0)}{\hbar} \hat{H} \right) = \exp \left( - \frac{i(t - t_0)}{4G_3\hbar} \left[ 1 - e^{-4G_3\hbar \sum_I \hat{H}_0^I} \right] \right). \quad (3.13)$$

Conviene resaltar que (3.13) proporciona una expresión cerrada y exacta para el operador de evolución para cualquier tiempo. En particular, este operador define la matriz  $S$  del sistema cuando tomamos  $t \rightarrow \infty$  y  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Los elementos de matriz correspondientes a estados de “n” partículas se calculan fácilmente, debido a que éstos son autoestados del Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0$ . Una propiedad interesante del operador de evolución es que los únicos elementos de matriz no nulos son aquellos que conectan estados con el mismo número de cuantos de cada tipo. Por tanto, bajo la evolución, no hay conversión de cuantos de un tipo en los del otro ni hay creación ni destrucción de partículas cuando evolucionamos en el tiempo.

Es interesante remarcar que nos encontramos en un sistema en interacción, por lo que debemos tener un cuidado especial a la hora de interpretar físicamente los estados. Por ejemplo, no se debe interpretar un estado del tipo  $|0\rangle^0 \otimes |\Phi\rangle$  como un estado de materia



evolucionando en una geometría minkowskiana. Esto es debido a que nos encontramos en un sistema en el que el campo “gravitatorio” (que describe los grados de libertad de la métrica) y el de “materia” están acoplados, por lo que no se puede pensar en ellos como dos objetos independientes. De hecho, la métrica clásica depende de ambos y, recíprocamente, la evolución del campo escalar depende de la métrica. En este sentido, el estado que más se acerca al vacío minkowskiano es  $|\Omega\rangle$  que, estrictamente, es el único estado coherente que conocemos para la evolución (3.13), tal y como se discutirá en el capítulo 6. En el capítulo siguiente estudiaremos aplicaciones físicas de esta cuantización y haremos uso de estados del tipo  $|0\rangle^0 \otimes |k\rangle^1$ , que son productos tensoriales del vacío del espacio de Fock gravitatorio y un estado de una partícula del espacio de materia. Estos estados serán los más cercanos a Minkowski (a pesar del acoplo) si se quiere incorporar cuantos de materia como objetos de prueba para estudiar la geometría cuantizada.

Para terminar es interesante destacar que en el operador de evolución aparece una escala de longitud característica del sistema

$$4G = 4G_3\hbar,$$

que juega el papel de “escala de Planck”. Como estaremos interesados en estudiar el límite clásico –el comportamiento del sistema al considerar distancias mucho mayores que la longitud característica ( $4G$ )– seguiremos manteniendo esta escala en las ecuaciones, aunque en lo sucesivo fijaremos  $\hbar = 1$ .

Para obtener la evolución de los operadores campo y su momento que utilizaremos en la sección siguiente, en la que se estudiarán las aplicaciones físicas, es necesario conocer la evolución temporal de los operadores de creación y aniquilación  $\hat{A}_I^\dagger(k)$  y  $\hat{A}_I(k)$ . Ésta viene dada por

$$\hat{A}_I(k; t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_I(k) \hat{U}(t, t_0) = \exp\left[-i(t - t_0)E(k)e^{-4G\hat{H}_0}\right] \hat{A}_I(k), \quad (3.14)$$

$$\hat{A}_I^\dagger(k; t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_I^\dagger(k) \hat{U}(t, t_0) = \hat{A}_I^\dagger(k) \exp\left[i(t - t_0)E(k)e^{-4G\hat{H}_0}\right], \quad (3.15)$$

donde

$$E(k) := \frac{1}{4G}(1 - e^{-4Gk}) \quad \text{y} \quad \hat{H}_0 := \sum_I \hat{H}_0^I.$$

Por tanto, la evolución de los operadores que describen los campos gravitatorio y de materia tendrá la forma siguiente:

$$\hat{\phi}_I(R; t, t_0) = \sqrt{4G} \int_0^\infty J_0(Rk) \left[ \hat{A}_I(k; t, t_0) + \hat{A}_I^\dagger(k; t, t_0) \right] dk.$$

Haremos uso de este resultado en el siguiente capítulo, donde nos aparecerán productos de los campos evaluados en diferentes puntos del espacio-tiempo bidimensional efectivo descrito por las coordenadas  $(R, t)$ .



## Capítulo 4

### Función de dos puntos

En los capítulos anteriores hemos conseguido dar una descripción clásica completa de las ondas de Einstein-Rosen acopladas con campos escalares sin masa, así como su cuantización exacta en el espacio de fases reducido. Ahora, nos proponemos obtener información geométrica sobre este sistema. En concreto, intentaremos explorar de una manera operacional la estructura espacio-temporal del sistema cuantizado, siguiendo una filosofía similar a la utilizada para explorar la geometría clásica usando partículas de prueba cuyas trayectorias marcan las geodésicas.

Con este fin, introduciremos las funciones de dos puntos del sistema en interacción, que jugarán el papel de los propagadores exactos. Éstas nos darán una idea de los efectos físicos asociados a la cuantización del sistema gravitatorio y nos ayudarán a entender cómo emerge, en el límite macroscópico, la geometría espacio-temporal clásica. Además, para discernir qué efectos son propios de una cuantización de la gravedad y cuáles son consecuencia de la simetría del sistema, compararemos nuestros resultados con los correspondientes al caso de un campo escalar libre, sin masa y con simetría axial que se propaga en una geometría minkowskiana. Esta comparación se hace conceptualmente más sencilla aquí que en las ondas de Einstein-Rosen al contar ahora con campos de materia. Nótese que si no tuviéramos campos externos acoplados, la interpretación de los resultados se tornaría más artificiosa.

La función de dos puntos juega un papel clave en la formulación estándar de la teoría cuántica de campos. Por ejemplo, es solución como núcleo integral (función de Green) de la ecuación clásica de ondas de Klein-Gordon y es un objeto fundamental en la descripción perturbativa de la teoría, siendo la base de la interpretación de los diagramas de Feynman. Asimismo, facilita el cálculo de las funciones de  $n$ -puntos, secciones eficaces, tasas de decaimiento, matriz  $S$ , etc. [33–36, 40].

En teoría cuántica de campos en espacios curvos, las funciones de dos puntos juegan un

papel importante en los procesos de creación de partículas y, por otro lado, son necesarias para calcular el valor esperado del tensor energía-momento  $\langle \hat{T}_{ab} \rangle$  utilizado en la aproximación semiclásica de la relatividad general [37–39]. Por último, resaltar el rol que juegan las funciones de dos puntos para seleccionar, por la condición de Hadamard, los estados para los cuales  $\langle \hat{T}_{ab} \rangle$  está bien definido y es no singular, es decir, los estados físicamente aceptables si queremos que se satisfaga, en el límite semiclásico, la “ecuación de Einstein”  $G_{ab} = 8\pi \langle \hat{T}_{ab} \rangle$ . De esta forma, las funciones de dos puntos son objetos que nos pueden proporcionar información relevante acerca de la estructura cuantizada de la geometría que estamos considerando y, por otro lado, su estudio es el primer paso natural para comenzar este análisis espacio-temporal.

Otro tipo de objetos a nuestra disposición para obtener información sobre la geometría del espacio-tiempo son los conmutadores de los campos, ya tratados en [138], y que explicaremos en el apéndice B. En ese caso, utilizaremos los elementos de matriz vacío-vacío de los mismos para estudiar la estructura causal de nuestro sistema, en particular el comportamiento de los conos de luz en el régimen cuántico.

## 4.1. Interpretación como amplitudes de probabilidad

El valor esperado del elemento de matriz vacío-vacío del producto de dos campos en diferentes puntos del espacio-tiempo, es decir, la función de dos puntos, puede ser interpretado, al menos de una forma aproximada (tal y como se hace usualmente al interpretar los diagramas de Feynman), como la amplitud de propagación de partículas o cuantos de un punto del espacio-tiempo a otro. Esta interpretación viene motivada por el razonamiento siguiente. Los operadores campo, que describen los grados de libertad gravitatorios o escalares, en la imagen de Schrödinger tienen la forma:

$$\hat{\phi}_I(R) = \sqrt{4G_3\hbar} \int_0^\infty J_0(Rk) [\hat{A}_I(k) + \hat{A}_I^\dagger(k)] dk.$$

Al actuar sobre el vacío  $|\Omega\rangle$  con el operador campo

$$\frac{1}{\sqrt{4G}} \hat{\phi}_I(R)|\Omega\rangle = \int_0^\infty dk J_0(Rk) \hat{A}_I^\dagger(k)|\Omega\rangle = \int_0^\infty dk J_0(Rk) |k\rangle_I$$

se obtiene una superposición lineal de los estados ortonormales  $|k\rangle_I := \hat{A}_I^\dagger(k)|\Omega\rangle$ , que tienen un “momento radial” bien definido  $k$  con coeficientes  $J_0(Rk)$ . Los coeficientes de la superposición lineal

$$J_0(Rk) = \frac{1}{\sqrt{4G}} {}_I\langle k | \hat{\phi}_I(R) | \Omega \rangle \quad (4.1)$$

son soluciones de la parte radial de la ecuación de Schrödinger en 2 dimensiones para estados con momento angular nulo

$$[\partial_R^2 + \frac{1}{R}\partial_R + k^2]J_0(Rk) = 0.$$

Esto nos permite dar a  $J_0^2(Rk)$  una interpretación de densidad de probabilidad, en el sentido de que si consideramos un pequeño elemento de volumen  $\Delta V$  a una distancia  $R$  del eje de simetría, el valor de  $J_0^2(Rk)\Delta V$  es proporcional a la probabilidad de encontrar una partícula del tipo  $I$  en ese volumen (nótese que ésta no es la probabilidad de encontrar la partícula a una cierta distancia del eje de simetría).

En lo que sigue, tomaremos siempre  $t_2 > t_1$  e interpretaremos los elementos de matriz  $\langle \Omega | \hat{\phi}_I(R_2; t_2, t_0) \hat{\phi}_I(R_1; t_1, t_0) | \Omega \rangle$  como la probabilidad (aproximada) de que una partícula creada a una distancia  $R_1$  del eje en un tiempo  $t_1$  sea detectada en el instante  $t_2$  a una distancia  $R_2$  del eje de simetría. La expresión de la función de dos puntos es:

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | \hat{\phi}_I(R_2; t_2, t_0) \hat{\phi}_I(R_1; t_1, t_0) | \Omega \rangle \\ &= 4G \int_0^\infty J_0(R_1 k) J_0(R_2 k) \langle \Omega | \hat{A}_I(k; t_2, t_0) \hat{A}_I^\dagger(k; t_1, t_0) | \Omega \rangle dk \\ &= 4G \int_0^\infty J_0(R_1 k) J_0(R_2 k) \exp[-i(t_2 - t_1)E(k)] dk, \end{aligned} \quad (4.2)$$

con  $E(k) := \frac{1}{4G}(1 - e^{-4Gk})$ . Aquí, hemos utilizado que los estados  $|k\rangle^I$  son autoestados de  $\hat{H}_0^I$  de autovalor  $k$  y hemos introducido un tiempo inicial  $t_0$ , que no aparecerá en las expresiones finales de los elementos de matriz que vamos a considerar, por lo que en lo sucesivo escribiremos sencillamente  $\langle \Omega | \hat{\phi}_I(R_2, t_2) \hat{\phi}_I(R_1, t_1) | \Omega \rangle$  para referirnos a la función de dos puntos.

A la hora de considerar la amplitud de propagación de cuantos del sector materia, podríamos considerar situaciones bastante generales. Por ejemplo, si únicamente hubiera un escalar de materia, podríamos tomar estados de la forma  $|C\rangle^0 \otimes |k\rangle^1$ , donde  $|C\rangle^0$  es un cierto estado de tipo gravitatorio “coherente” bajo la evolución definida por la dinámica del sistema. Sin embargo, la interpretación de un estado de este tipo no está completamente clara y, en particular, no se debe pensar que la parte gravitacional ( $|C\rangle^0$ ) del estado fija la geometría y la parte de materia fija el campo de materia. De hecho, ambas partes del vector de estado contribuyen a fijar la métrica y el campo escalar de materia en 3+1 dimensiones. Esto se puede entender clásicamente notando que la métrica depende de ambos campos escalares, el gravitacional y el de materia. Por otra parte, encontrar estados coherentes bajo la evolución no es un problema trivial. De hecho, como explicaremos en el capítulo 6, el único estado coherente en sentido estricto que se conoce de este sistema es el vacío  $|\Omega\rangle$ .

## 4.2. Resultados en la región asintótica para diferentes parámetros

Pese a que la integral (4.2) es una expresión cerrada y exacta para el propagador resulta difícil extraer información física de la misma de forma directa. Nos interesa, en particular, su comportamiento en el límite  $G \rightarrow 0$  (equivalente a considerar escalas grandes comparadas con la longitud característica del sistema). Con este objetivo, utilizaremos métodos asintóticos para aproximarla [148]. Los parámetros relevantes en la integral son: los argumentos de la función de dos puntos ( $R_1, R_2, t_2 - t_1$ ) y la escala de longitud del sistema ( $4G$ ). De hecho,  $4G$  juega el papel de longitud de Planck<sup>1</sup> y fija las escalas de tiempo y energía. Por tanto, parece apropiado referir todas las magnitudes de distancia y tiempo a la dada por  $4G$ . Así, introducimos las variables adimensionales  $\rho_1 = \frac{R_1}{4G}$ ,  $\rho_2 = \frac{R_2}{4G}$ , y  $\tau = \frac{t_2 - t_1}{4G}$  junto con el cambio de variable de integración  $q = 4Gk$ , que nos da una variable adimensional. De esta forma, la ecuación (4.2) queda

$$\langle \Omega | \hat{\phi}_I(R_2, t_2) \hat{\phi}_I(R_1, t_1) | \Omega \rangle = \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq. \quad (4.3)$$

En principio se podría intentar calcular numéricamente la integral impropia (4.3). Sin embargo, esto es bastante complicado debido a la naturaleza oscilante del integrando. A pesar de esto, hay formas eficientes de hacerlo, como la descrita en el apéndice D, donde se reescribe la integral como la suma de una integral sobre un toro más una integral impropia que converge rápidamente. En cualquier caso, nos interesa también estudiar de forma analítica el comportamiento del propagador en ciertos regímenes físicos, por ejemplo, cuando algunos o todos los parámetros son grandes. Los desarrollos asintóticos de la integral nos permitirán ver este tipo de comportamientos, así como obtener estimaciones numéricas rápidamente. Es posible considerar diferentes desarrollos asintóticos en cada uno de los parámetros  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\tau$  —que son útiles ya que nos permiten estudiar el comportamiento de la función de dos puntos cuando solamente uno de ellos es grande— o también podemos considerar desarrollos para el caso en el que todos ellos son grandes y conservan sus valores relativos constantes. Estos desarrollos que estudiaremos ahora nos valdrán para el régimen en el que el parámetro en cuestión sobre el que se hace el desarrollo sea grande en comparación con la escala característica del sistema ( $4G$ ). Los cálculos concretos para obtener las expresiones de los desarrollos asintóticos se recogen en el apéndice C. En este capítulo discutiremos las consecuencias físicas que podemos extraer de dichos desarrollos.

---

<sup>1</sup>Estamos considerando unidades en las que  $\hbar = c = 1$ .

### 4.2.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$

Comenzamos estudiando el comportamiento asintótico de (4.3) para valores grandes de  $\rho_1$ . El desarrollo para  $\rho_2$  será el mismo (cambiando  $\rho_1$  por  $\rho_2$ ) debido a que aparecen de una forma simétrica en la integral. Así, el desarrollo asintótico, deducido en el apéndice C, es:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1^3} \left[ \frac{\rho_2^2}{4} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{i\tau}{2} \right] + O(\rho_1^{-5}), \quad \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^3} \left[ \frac{\rho_1^2}{4} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{i\tau}{2} \right] + O(\rho_2^{-5}).$$

A pesar de que este resultado no es especialmente ilustrativo para el estudio de las funciones de dos puntos, da información importante sobre la microcausalidad (como se explica en el apéndice B), donde se aprecia claramente que el valor del elemento de matriz vacío-vacío del conmutador de los campos, tiene un valor no nulo en la región asintótica radial y, en particular, en zonas del espacio-tiempo que se encuentran fuera del cono de luz minkowskiano.

### 4.2.2. Desarrollo asintótico en $\tau$

Para estudiar el desarrollo asintótico en  $\tau$  (es decir, para intervalos grandes en las coordenadas temporales) tendremos en cuenta por separado los casos en los que tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son distintos de cero y el caso en el que alguno de ellos es cero. Cuando ambos son cero, la integral diverge trivialmente.

Comenzaremos por el caso en el que tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son diferentes de cero. En este caso, el desarrollo de (4.3) viene dado por:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}\log\tau} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) - i\left[\frac{\pi}{2} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right) \Gamma[-i(\rho_1 + \rho_2)] \right. \\ & + \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right) \Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)] \\ & + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2) - i[\tau + (\rho_2 - \rho_1)\log\tau]\right) \Gamma[i(\rho_2 - \rho_1)] \\ & \left. + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1) - i[\tau + (\rho_1 - \rho_2)\log\tau]\right) \Gamma[i(\rho_1 - \rho_2)] \right\} + O(1/\log^2\tau). \end{aligned} \quad (4.4)$$

El comportamiento asintótico en  $\tau$  cuando bien  $\rho_1$  ó  $\rho_2$  son nulos se calcula de forma análoga al caso con ambos distintos de cero. Los desarrollos asintóticos son en este caso:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho\log\tau}} \left\{ \exp\left[\frac{\pi}{2}\rho - i\left(\frac{\pi}{4} + \tau - \rho\log\tau\right)\right] \Gamma(-i\rho) \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho + i\left(\frac{\pi}{4} - \tau - \rho\log\tau\right)\right] \Gamma(i\rho) \right\} + O(1/\log^{3/2}\tau), \end{aligned}$$

siendo  $\rho$  el parámetro radial que no es cero.

Observamos que para valores fijos de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  el decaimiento cuando uno de ellos es cero es más lento (como el inverso de  $\sqrt{\log \tau}$ ) que el decaimiento cuando tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son distintos de cero (como el inverso de  $\log \tau$ ).

Compararemos ahora estos resultados con los obtenidos para el propagador de un campo de este tipo en un fondo minkowskiano:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(R_2, t_2) \hat{\phi}(R_1, t_1) | 0 \rangle = \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp(-i\tau q) dq,$$

donde  $|0\rangle$  representa el vacío del sistema.

Para valores de  $\tau$  tales que  $\tau > \rho_1 + \rho_2$ , es decir, en el régimen que nos interesa al ser  $\tau$  grande, esta integral vale

$$- \frac{2i}{\pi \sqrt{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}} \right), \quad (4.5)$$

donde  $K$  es la integral elíptica de primera especie<sup>2</sup>. Para valores grandes de  $\tau$ , (4.5) se comporta como  $-i/\tau$ , es decir, cae a cero mucho más rápido que (4.3). Como consecuencia de este hecho, interpretamos el lento decaimiento de la función de dos puntos para el sistema de ondas de Einstein-Rosen cuantizado como un aumento de la amplitud de probabilidad de encontrar cuantos (bien sea del tipo de materia o del tipo gravitatorio) en el eje de simetría. Éste es un efecto cuántico-gravitatorio que no está presente en el correspondiente caso libre.

### 4.2.3. Desarrollo asintótico para $\rho_1, \rho_2$ y $\tau$ simultáneamente grandes

Estudiaremos ahora la obtención de una aproximación asintótica válida en el límite “clásico-gravitatorio”, que corresponde a tomar  $\rho_1, \rho_2$  y  $\tau$  grandes preservando sus valores relativos. Esto es equivalente a considerar valores de  $R_1, R_2$  y  $t_2 - t_1$  que sean mucho mayores que la escala característica dada por  $4G$ . Es en este sentido en el que hablamos aquí de un límite clásico.

---

<sup>2</sup>En lo sucesivo, nos aparecerán integrales elípticas de primera (K), segunda (E) y tercera especie (Π), que están definidas de la forma:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad \Pi(n|k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$



Para calcular el desarrollo asintótico es necesario, como se explica en el apéndice C, considerar tres regiones del espacio de parámetros  $(\rho_1, \rho_2, \tau)$  dadas por (ver figura 4.1):

$$\text{Región I : } \tau \leq |\rho_2 - \rho_1|$$

$$\text{Región II : } |\rho_2 - \rho_1| < \tau < \rho_1 + \rho_2$$

$$\text{Región III : } \tau \geq \rho_1 + \rho_2$$

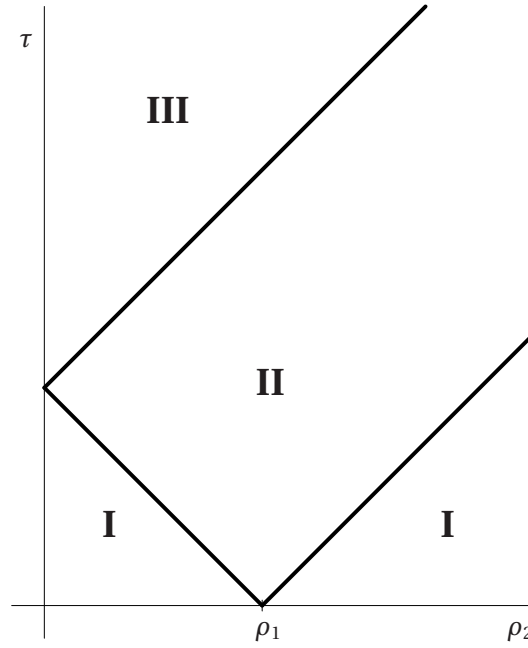


Figura 4.1: En esta figura se representan, para un valor fijo de  $\rho_1$ , las tres regiones del espacio  $(\rho_2, \tau)$ . El desarrollo asintótico tiene una forma diferente en cada una de las regiones.

El desarrollo asintótico en esta ocasión (escrito por regiones), viene dado por un término principal y correcciones asintóticas. La contribución principal al desarrollo asintótico es:

$$\text{Región I : } \frac{2}{\pi \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} \right) \quad (4.6a)$$

$$\text{Región II : } \frac{1}{\pi \sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ K \left( \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}{4\rho_1\rho_2}} \right) - iK \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}{4\rho_1\rho_2}} \right) \right] \quad (4.6b)$$

$$\text{Región III : } \frac{-2i}{\pi \sqrt{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} \right), \quad (4.6c)$$

y las primeras correcciones

$$\begin{aligned} \text{Región I : } & -\frac{i\tau}{2\pi} \left\{ \frac{2\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}[\rho_1^4 + \rho_2^4 + 2\rho_1^2\tau^2 - 3\tau^4 + 2\rho_2^2\tau^2 - 2\rho_1^2\rho_2^2]}{(\rho_1 + \rho_2 - \tau)^2(\rho_1 - \rho_2 + \tau)^2(-\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2(\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2} \right. \\ & \times E\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) - \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}[\rho_2^4 + (\tau^2 - \rho_1^2)^2 - 2\rho_2^2(\rho_1^2 + \tau^2)]} \\ & \left. \times K\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$$\text{Región II : } \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}|\rho_1 - \rho_2| \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} \quad (4.7b)$$

$$\text{Región III : } \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} + \frac{e^{-i\left[\frac{\pi}{4} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)(1 + \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2})\right]}}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2} \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2}} \right\}. \quad (4.7c)$$

Es interesante estudiar ahora la función de dos puntos para un campo escalar sin masa con simetría axial en un fondo minkowskiano. El propagador en este caso se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}(R_2, t_2) \hat{\phi}(R_1, t_1) | 0 \rangle &= \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp(-i\tau q) dq \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \oint dz_1 \oint dz_2 \frac{1}{\rho_2 z_1 (z_2^2 - 1) + z_2 (\rho_1 (z_1^2 - 1) - 2i\tau z_1)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la representación integral de las funciones de Bessel (ver apéndice C). Esta integral de contorno doble coincide exactamente con la integral que nos proporciona el término principal (4.6) del desarrollo asintótico. Por tanto, deducimos que la contribución principal al desarrollo asintótico en  $\lambda$  no es más que el propagador en el caso correspondiente en Minkowski. Podemos concluir, por tanto, que las correcciones (4.7) a estos términos son consecuencia de que nos encontramos en un sistema gravitatorio cuantizado.

Finalmente, podemos estudiar el caso en el que bien  $\rho_1 = 0$  ó  $\rho_2 = 0$ . Ahora sólo tenemos una función de Bessel  $J_0$  en el integrando, por lo que el cálculo del desarrollo asintótico se simplifica mucho. El método a seguir es análogo al utilizado cuando  $\rho_1 \neq 0 \neq \rho_2$ ; y el resultado final del desarrollo de (4.3) es:

$$\begin{aligned} \theta(\rho - \tau) & \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} - \frac{i\tau(\rho^2 + 2\tau^2)}{(\rho^2 - \tau^2)^{5/2}} \right] \\ & + \theta(\tau - \rho) \left[ \frac{-i}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} + \frac{\exp(i[\rho \log \frac{\tau}{\rho} - \tau + \rho])}{\rho \sqrt{\log \frac{\tau}{\rho}}} \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $\rho$  es el parámetro radial que no es cero. Observamos que la expresión anterior no se obtiene directamente de (4.6,4.7) poniendo  $\rho_1 = 0$  ó  $\rho_2 = 0$ , sino que tiene un comportamiento distinto.

Las figuras (4.2,4.3) muestran el comportamiento de la función de dos puntos. Se puede comparar en las gráficas los valores exactos obtenidos numéricamente con la aproximación dada por los desarrollos asintóticos. También está representada la función de dos puntos para un campo escalar sin masa con simetría axial evolucionando en un fondo minkowskiano. Es importante notar que los desarrollos asintóticos nos permiten conocer con exactitud el comportamiento de la función de dos puntos en los límites relevantes. La información física más importante, observada ya al estudiar el desarrollo en  $\tau$ , que podemos extraer de estas gráficas es el aumento de la probabilidad de encontrar cuantos (bien sean de tipo materia o de tipo gravitatorio) en las proximidades del eje de simetría en comparación con el caso del campo libre. Sin embargo, lejos del eje ( $\rho_1$  y  $\rho_2$  grandes), la contribución dominante (4.6) está dada por la correspondiente a un campo sin masa en Minkowski. Por otro lado, el desarrollo para  $\rho = 0$  muestra que en el eje de simetría no se recupera el resultado libre en el límite asintótico.

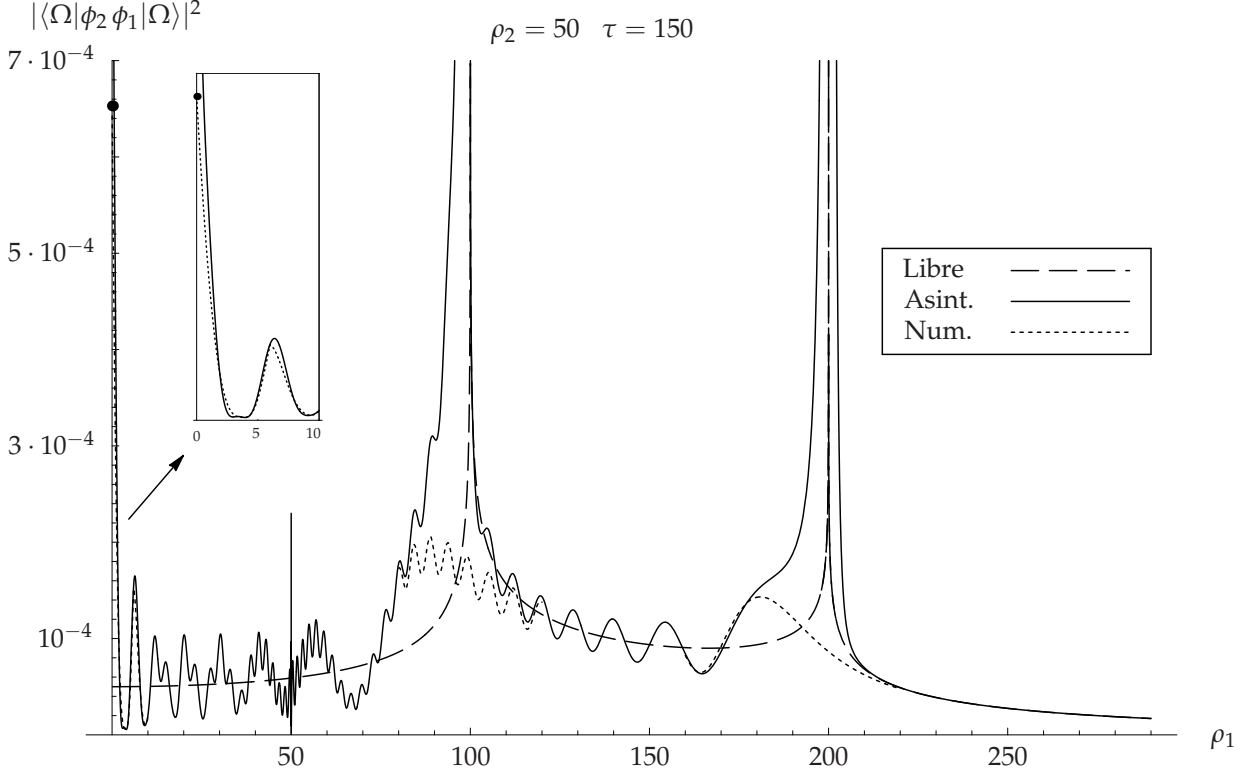


Figura 4.2: Esta figura muestra el cuadrado del valor absoluto de la función de dos puntos para valores fijos de  $\rho_2$  y de  $\tau$  en términos de  $\rho_1$ . Representa la probabilidad aproximada de encontrar un cuanto en un pequeño volumen centrado alrededor de  $\rho_1$  después de un tiempo  $\tau$  si su posición cuando  $\tau = 0$  era  $\rho_2$ . Tanto las distancias radiales como el tiempo están medidos en unidades de  $4G$ . Comparamos los valores exactos obtenidos numéricamente (etiquetado como “Num.”), la aproximación dada por los desarrollos asintóticos (4.6,4.7) (“Asint.”) y el caso correspondiente en Minkowski (“Libre”). Se observa el gran aumento de la probabilidad en el eje. El punto en el eje vertical corresponde al valor de la función de dos puntos para  $\rho_1 = 0$ . Es digna de resaltar la calidad del desarrollo asintótico, que coincide perfectamente con el cálculo numérico excepto en la frontera entre las regiones mostradas en la figura 4.1. Vemos también que, aunque se espera que el análisis asintótico no sea válido para valores pequeños de  $\rho_1$  ó  $\rho_2$ , describe bastante bien el comportamiento de la función de dos puntos en esta región.

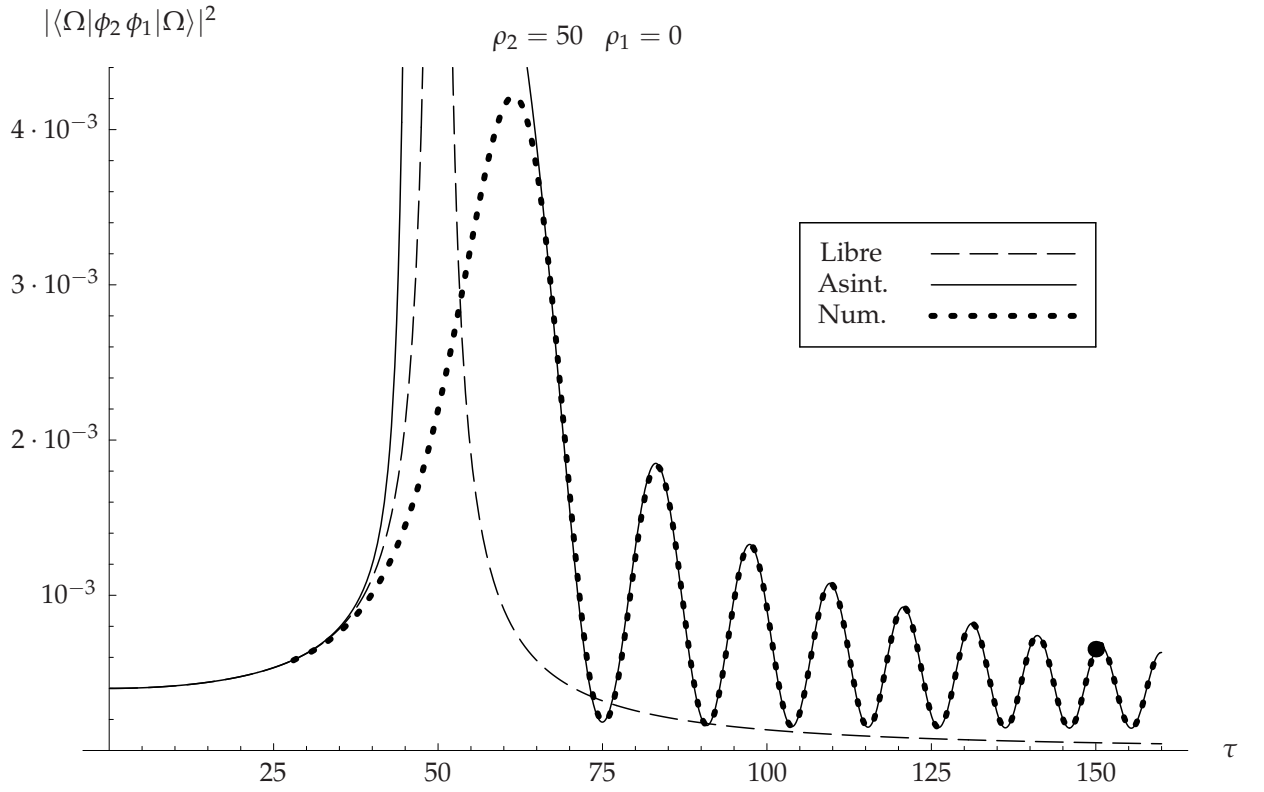


Figura 4.3: Esta figura muestra el cuadrado del valor absoluto de la función de dos puntos para un valor fijo de  $\rho_2$  y  $\rho_1 = 0$ . Observamos que la amplitud no se comporta en valor medio como la correspondiente al caso libre. El punto en  $\tau = 150$  corresponde al valor de la función de dos puntos en el eje representado en aquella figura. Nótese la diferente escala utilizada en ambas figuras.



# Capítulo 5

## Función de onda

El principal inconveniente de las funciones de dos puntos discutidas en el capítulo anterior es que su interpretación como amplitudes de probabilidad sólo puede ser aproximada. La razón de que esto ocurra se debe a que los vectores

$$\hat{\phi}_I(R; t, t_0)|\Omega\rangle$$

no constituyen un conjunto ortonormal. Este problema está en la base del conocido problema de la localización en Teoría Cuántica de Campos que fue esencialmente resuelto por T. D. Newton y E. P. Wigner mediante la introducción de los llamados estados de Newton-Wigner [151]. Éstos forman una base ortonormal (generalizada) de autoestados de posición para una elección concreta del sistema de referencia inercial en el espacio-tiempo de Minkowski. La mayor dificultad a la hora de interpretar estos estados está en el hecho de que dejan de ser estados localizados bajo transformaciones de Lorentz, concretamente bajo los *boost* [152]. Sin embargo, las premisas sobre las que está basada la construcción de los mismos son muy naturales, por lo que cuesta creer que exista una solución mejor al problema de la localización.

El objetivo de este capítulo es construir estados localizados (en un valor  $R$  de la coordenada radial) para nuestro modelo análogos a los de Newton-Wigner. Denotaremos a estos estados por  $|R\rangle$ . Nótese que estamos tratando con un sistema que presenta un grupo de simetría reducido, por lo que el problema de la “deslocalización” de estos estados bajo transformaciones de simetría es menos acusado en nuestro caso. La interpretación física de las amplitudes de propagación construidas con este tipo de estados es clara en el sentido de que ahora son auténticas amplitudes de probabilidad. El punto de vista que adoptaremos es que la discusión realizada para las funciones de dos puntos  $\langle\Omega|\hat{\phi}_I(R_2, t_2)\hat{\phi}_I(R_1, t_1)|\Omega\rangle$  junto con los elementos de matriz  $\langle R_2|\hat{U}(t_2, t_1)|R_1\rangle$  nos pueden proporcionar información relevante sobre la propagación de los cuantos del campo (tanto el gravitatorio como el de materia)

en el espacio de posiciones así como sobre la transición entre la geometría cuántica y la clásica en el marco de la gravedad cuántica. Hacemos notar que al disponer de una base ortonormal de estados de posición, podemos definir funciones de onda normalizadas en el espacio de posiciones para estados de una partícula

$$|\Psi\rangle = \int_0^\infty dR \Psi(R) |R\rangle, \quad \langle R|\Psi\rangle = \Psi(R), \quad \int_0^\infty |\Psi(R)|^2 dR = 1$$

y estudiar su evolución temporal (en la imagen de Schrödinger) dada por  $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle$ .

### 5.1. Estados de Newton-Wigner

El problema de encontrar estados localizados en teoría cuántica de campos tiene profundas consecuencias filosóficas (como la definición de partícula o implicaciones sobre la deslocalización de las excitaciones de los campos) y ha sido ampliamente tratado en la literatura [151–160]. Sin embargo, no se ha encontrado una solución plenamente satisfactoria al mismo. Como explicaremos, la mejor opción es utilizar los estados de Newton-Wigner, a pesar de que estos estados presentan ciertos problemas conceptuales al no transformarse adecuadamente bajo los *boosts* de Lorentz. Discutiremos en esta sección brevemente la construcción y las propiedades de los estados de Newton-Wigner en un espacio minkowskiano de 4 dimensiones. Seguidamente, construiremos estados análogos a éstos adaptados a nuestro sistema (2+1 dimensiones con simetría axial).

Comenzamos discutiendo los posibles operadores de posición en teoría de campos. En principio, tenemos varias opciones para elegir estos operadores, pero nos restringiremos a aquellas que cumplan ciertas condiciones que son fundamentales (e intuitivas) para cualquier operador de posición [151, 153, 155]. Sucintamente, estos requerimientos están basados en que la probabilidad de encontrar la partícula en una región del espacio se comporte adecuadamente bajo la unión y la intersección de los conjuntos en los que se pueda medir así como que tenga el comportamiento adecuado bajo traslaciones y rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . Por otro lado, para tener una noción de localización en una región finita (debido a argumentos de análisis funcional para la construcción de la medida espectral) es necesario que las componentes del operador de posición conmuten. Un operador de posición que tenga estas características y que además (en el caso fermiónico) no mezcle estados de energía positiva con estados de energía negativa es un operador de posición de Newton-Wigner  $\hat{X}_{NW}$ .

Ahora construiremos estados pertenecientes al espacio de Hilbert de un campo escalar en Minkowski que puedan ser interpretados como autoestados de  $\hat{X}_{NW}$  localizados en un punto  $\mathbf{x}$  del espacio. El principal inconveniente, en cuanto a lo que al problema de la localización



se refiere, de los estados<sup>1</sup>

$$|\mathbf{x}\rangle_{KG} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} |\mathbf{k}\rangle$$

que corresponden a un campo escalar relativista que satisface la ecuación de Klein-Gordon es que no forman un conjunto “ortonormal” en el sentido de que

$${}_{KG}\langle\mathbf{x}'|\mathbf{x}\rangle_{KG} \neq \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

Así pues, no podemos interpretar  $|\mathbf{x}\rangle_{KG}$  como un estado de una partícula que está en el punto  $\mathbf{x}$  y no en el  $\mathbf{x}'$  (con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ). La causa de que estos estados no sean ortogonales reside en el factor  $\sqrt{\omega(\mathbf{k})}$  del denominador. Sin embargo, es este término el que garantiza la invariancia de la medida

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\omega(\mathbf{k})}}$$

bajo transformaciones de Lorentz. De todas formas, si suprimimos este factor de la expresión anterior obtenemos un estado

$$|\mathbf{x}\rangle_{NW} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} |\mathbf{k}\rangle, \quad (5.1)$$

al que hemos denotado con la etiqueta “NW” haciendo referencia a Newton-Wigner, que también cumple la ecuación de Klein-Gordon y que satisface la condición de ortogonalidad

$${}_{NW}\langle\mathbf{x}'|\mathbf{x}\rangle_{NW} = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

Es fácil comprobar que la familia de estados  $|\mathbf{x}\rangle_{NW}$  no es cerrada bajo los *boosts* de Lorentz. Es en este sentido en el que decíamos que son autoestados de posición para una elección concreta del sistema de referencia inercial. Un observador que se encuentre en este sistema de referencia, tendrá la certeza de encontrar la partícula en una región determinada del espacio arbitrariamente pequeña en un instante de tiempo (arbitrario) especificado. Sin embargo, otro observador que se encuentre en otro sistema de referencia (también inercial) moviéndose con respecto al primero, observaría el mismo estado de forma que, aunque todavía principalmente concentrado en  $\mathbf{x}$ , tendría una probabilidad no nula de encontrar la partícula en cualquier otra posición, concretamente, este observador podría detectar la partícula en puntos del espacio arbitrariamente lejanos de  $\mathbf{x}$  [154, 155].

Por otro lado, considerando de nuevo el estado  $|\mathbf{x}, t = 0\rangle_{NW}$ , sucede que para todo  $\epsilon > 0$ , la amplitud de  $|\mathbf{x}, t = \epsilon\rangle_{NW}$  (aunque todavía concentrada principalmente en  $\mathbf{x}$ ) es no nula

---

<sup>1</sup>  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ , siendo  $m$  la masa en reposo de la partícula.

en puntos arbitrariamente lejanos. Esto sugiere que los cuantos descritos por los estados de Newton-Wigner se pueden propagar a velocidades superiores a la de la luz<sup>2</sup> [156–160].

En cualquier caso no hemos de olvidar que toda esta discusión se ha realizado en el contexto ideal de una teoría libre. En la realidad, las partículas siempre interactúan unas con otras; y si admitimos interacciones tenemos que el proceso de localizar una partícula en un volumen arbitrariamente pequeño requiere energías arbitrariamente grandes lo que, en una teoría en interacción, implica procesos de creación de pares partícula-antipartícula. Este es uno de los argumentos más ampliamente utilizados para rechazar la posibilidad de localizar una partícula en una región del espacio arbitrariamente pequeña.

Para finalizar, señalar que los estados de Newton-Wigner descritos por la ecuación (5.1) son la única forma correcta (de manera que se cumplan las condiciones naturales explicadas anteriormente) de describir estados exactamente localizados en teoría cuántica de campos [38, 151–153]. Por tanto, se puede concluir subrayando que cualquier otra descripción de estados localizados o de observable de posición ofrecería incluso más problemas.

Centrándonos de nuevo en las ondas de Einstein-Rosen, queremos construir estados localizados (análogos a los de Newton-Wigner) para nuestro espacio-tiempo reducido de 2+1 dimensiones con simetría axial. Es necesario recordar que ahora tratamos con un grupo de simetría reducido (las simetrías de las soluciones de la ecuación de ondas en 2+1 con simetría axial son las traslaciones, las dilataciones y las inversiones [134]), por lo que los problemas que surgen en el caso original con las transformaciones de Lorentz se ven aquí parcialmente aliviados.

Construiremos los “estados de Newton-Wigner” de nuestro sistema de dos formas distintas (completamente equivalentes). En primer lugar, seguiremos un procedimiento inspirado en [151]. Escribimos

$$|R\rangle = |R\rangle_{NW} = \int_0^\infty dk f(k) J_0(kR) |k\rangle$$

donde  $|k\rangle := |0\rangle^0 \otimes |k\rangle^1$  son cuantos del campo escalar de materia y hemos hecho uso de que  $J_0(kR)$  es una solución de la parte radial de la ecuación de Schrödinger en 2 dimensiones para estados con momento angular nulo:

$$\left[ \partial_R^2 + \frac{1}{R} \partial_R + k^2 \right] J_0(kR) = 0.$$

Una vez que hemos hecho esta elección, la función  $f(k)$  está fijada por la condición de ortogonalidad  $\langle R_2 | R_1 \rangle = \delta(R_2, R_1)$ , que implica  $|f(k)|^2 = kR$  y, por tanto,  $f(k) = \sqrt{kR} e^{i\nu(k)}$ . Sin pérdida de generalidad, tomaremos  $\nu(k) = 0$ . De esta manera obtenemos el estado

---

<sup>2</sup>Este problema es una característica común de todos los operadores de posición que (en caso de tratar con fermiones) no mezclan los estados de energía positiva con los de energía negativa [153].

localizado de Newton-Wigner que estábamos buscando

$$|R\rangle = \int_0^\infty dk \sqrt{kR} J_0(kR) |k\rangle. \quad (5.2)$$

Es interesante intentar llegar a este resultado por otro procedimiento, siguiendo el espíritu y la notación de la sección 3.1. La base generalizada del espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}$  que se utilizó allí fue la que proporcionan las funciones

$$Y_k(r) := \frac{1}{\sqrt{2}} J_0(kr).$$

Dicha base está adaptada al operador Hamiltoniano, es decir, las funciones  $Y_k$  son autoestados del operador  $\Theta$  con autovalor  $k^2$ :

$$\Theta Y_k = k^2 Y_k.$$

Esto nos permite, por ejemplo, dar sentido a  $\Theta^{\frac{1}{2}}$  mediante

$$\Theta^{\frac{1}{2}} Y_k := k Y_k.$$

La ortogonalidad de dichas funciones se sigue de<sup>3</sup>

$$\langle Y_{k_1}, Y_{k_2} \rangle = 2 \langle Y_{k_1}, \Theta^{\frac{1}{2}} Y_{k_2} \rangle_{L^2} = \int_0^\infty k_2 J_0(k_1 r) J_0(k_2 r) r dr = \delta(k_1, k_2).$$

Vamos ahora a buscar una nueva base generalizada  $\{N_R\}_{R \in [0, \infty)}$ , distinta de la que proporcionan los autoestados de  $\Theta$ , imponiendo que las distribuciones  $N_R(r)$  estén localizadas en el punto del espacio  $r = R$ . Esta condición se puede concretar exigiendo que  $N_R$  tenga soporte en  $r = R$  y se cumpla

$$\langle N_{R_1}, N_{R_2} \rangle = 2 \langle N_{R_1}, \Theta^{\frac{1}{2}} N_{R_2} \rangle_{L^2} = \delta(R_1, R_2). \quad (5.3)$$

Aunque la relación (5.3) no se cumple con la elección ingenua  $N_R(r) = \delta_R(r)$ , basta tomar

$$N_R(r) := \frac{1}{\sqrt{2R}} (\Theta^{-\frac{1}{4}} \delta_R)(r) \quad (5.4)$$

para que (5.3) se satisfaga<sup>4</sup>. Los estados definidos en (5.4) son justamente los estados de Newton-Wigner que hemos construido más arriba. En efecto, usando la representación integral para  $\delta_R$  dada por

$$\delta_R(r) = R \int_0^\infty k J_0(kR) J_0(kr) dk$$

<sup>3</sup>Recuérdese que  $\langle C_1, C_2 \rangle_{L^2} := \int_0^\infty \overline{C_1(r)} C_2(r) r dr$ .

<sup>4</sup>La distribución  $\delta_R(r)$  es una delta de Dirac respecto de la medida  $dr$ , es decir,  $\int_0^\infty F(r) \delta_R(r) dr = F(R)$ .

podemos reescribir (5.4) en la forma

$$\begin{aligned} N_R(r) &= \frac{1}{\sqrt{2R}} \Theta_r^{-\frac{1}{4}} R \int_0^\infty k J_0(kR) J_0(kr) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sqrt{kR} J_0(kR) J_0(kr) dk \\ &= \int_0^\infty \sqrt{kR} J_0(kR) Y_k(r) dk = |R\rangle(r). \end{aligned}$$

En la notación de bra-kets, en la que  $Y_k := |k\rangle$ , la última expresión se escribe:

$$|R\rangle = \int_0^\infty dk \sqrt{kR} J_0(kR) |k\rangle,$$

que, obviamente, es equivalente a (5.2).

## 5.2. Propagador de Newton-Wigner

En esta sección estudiaremos el comportamiento del propagador construido utilizando los estados de Newton-Wigner descritos en la sección anterior. Así, nos interesa estudiar los objetos de la forma:

$$\begin{aligned} \langle R_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | R_1 \rangle &= \sqrt{R_1 R_2} \int_0^\infty k J_0(kR_1) J_0(kR_2) \exp[-i(t_2 - t_1)E(k)] dk \\ &= \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{4G} \int_0^\infty q J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq \\ &= \frac{e^{-i\tau}}{4G} \delta(\rho_1, \rho_2) + \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{4G} e^{-i\tau} \int_0^\infty q J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) [\exp(i\tau e^{-q}) - 1] dq, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde, al igual que en el capítulo 4, hemos hecho uso de las variables adimensionales  $(\rho_1, \rho_2, \tau, q)$  para facilitar el estudio del comportamiento asintótico del propagador de Newton-Wigner. La última integral en la expresión anterior converge rápidamente debido al decaimiento exponencial del integrando. Hacemos notar la singularidad en  $\rho_1 = \rho_2$  que estaba presente también en la función de dos puntos. Por otra parte, al igual que nos ocurría en aquel caso, no podemos dar una forma cerrada para la expresión (5.5) aunque puede ser calculada numéricamente de la forma expuesta en el apéndice D. De todas formas, nos interesa estudiar el desarrollo asintótico de esta expresión para obtener información de la misma en los distintos regímenes físicos y estudiar el “límite clásico”.

Un tema importante que requiere cierta explicación es el significado de (5.5) como amplitud de probabilidad. En el caso de la función de dos puntos, se remarcó la interpretación de (4.1) como la parte radial de la función de onda con momento angular cero para una

partícula libre bidimensional. Ahora<sup>5</sup>  $|\langle k|R\rangle|^2 = kRJ_0^2(kR)$  y el factor  $R$  sugieren que la interpretación correcta de las amplitudes dadas por los estados de Newton-Wigner es que el propagador describe la probabilidad de encontrar los cuantos del campo en el interior de una fina capa cilíndrica a la distancia  $R$  del eje. Esto quiere decir que, si queremos comparar las funciones de dos puntos del capítulo anterior con  $\langle R_2|\hat{U}(t_2, t_1)|R_1\rangle$  tendremos que introducir factores de  $R_1$  y  $R_2$  apropiados. Concretamente, estudiaremos

$$\frac{(4G)^2}{\sqrt{R_1 R_2}} \langle R_2|\hat{U}(t_2, t_1)|R_1\rangle = \int_0^\infty q J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq. \quad (5.6)$$

A continuación, discutiremos los desarrollos asintóticos para este propagador en los mismos regímenes descritos para la función de dos puntos en el capítulo anterior.

### 5.2.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$

Para valores grandes de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  el comportamiento asintótico de (5.6) viene dado, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho_1^3} \left\{ i + \frac{9}{\rho_1^2} \left[ -\frac{i}{6} + \frac{i\rho_2^2}{4} + \frac{\tau}{2} + \frac{i\tau^2}{6} \right] \right\} + O(\rho_1^{-7}), \\ \frac{\tau}{\rho_2^3} \left\{ i + \frac{9}{\rho_2^2} \left[ -\frac{i}{6} + \frac{i\rho_1^2}{4} + \frac{\tau}{2} + \frac{i\tau^2}{6} \right] \right\} + O(\rho_2^{-7}), \end{aligned}$$

obtenido de forma análoga al caso de la función de dos puntos (mediante el empleo de técnicas basadas en transformadas de Mellin). Al comparar este resultado con el obtenido en el capítulo anterior, observamos que coinciden cualitativamente en la parte imaginaria pero difieren en valor absoluto y en la parte real. Esto no es un hecho inesperado ya que la interpretación de la función de dos puntos como amplitud de probabilidad es (como ya se ha comentado) sólo aproximada.

### 5.2.2. Desarrollo asintótico en $\tau$

Al igual que antes, es conveniente estudiar por separado el caso en el que tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son diferentes de cero y el caso en el que alguno de ellos es cero. Utilizando los mismos métodos que en el capítulo anterior (descritos en el apéndice C) encontramos que

---

<sup>5</sup>Nótese que  $\langle k|R\rangle$  no es solución de la ecuación de Shrödinger.

el desarrollo de (5.6) para el caso  $\rho_1 \neq 0 \neq \rho_2$  es:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) - i\left[\frac{\pi}{2} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right)\Gamma[-i(\rho_1 + \rho_2)] \right. \\ & \quad + \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right)\Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)] \\ & \quad + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2) - i[\tau + (\rho_2 - \rho_1)\log\tau]\right)\Gamma[i(\rho_2 - \rho_1)] \\ & \quad \left. + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1) - i[\tau + (\rho_1 - \rho_2)\log\tau]\right)\Gamma[i(\rho_1 - \rho_2)] \right\} + O(1/\log\tau). \end{aligned}$$

Cuando bien  $\rho_1$  o  $\rho_2$  son iguales a cero tenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\log\tau}{2\pi\rho_2}} \left\{ \exp\left[\frac{\pi}{2}\rho_2 - i\left(\frac{\pi}{4} + \tau - \rho_2\log\tau\right)\right]\Gamma(-i\rho_2) \right. \\ & \quad \left. + \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho_2 + i\left(\frac{\pi}{4} - \tau - \rho_2\log\tau\right)\right]\Gamma(i\rho_2) \right\} + O(1/\log^{1/2}\tau), \\ & \sqrt{\frac{\log\tau}{2\pi\rho_1}} \left\{ \exp\left[\frac{\pi}{2}\rho_1 - i\left(\frac{\pi}{4} + \tau - \rho_1\log\tau\right)\right]\Gamma(-i\rho_1) \right. \\ & \quad \left. + \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho_1 + i\left(\frac{\pi}{4} - \tau - \rho_1\log\tau\right)\right]\Gamma(i\rho_1) \right\} + O(1/\log^{1/2}\tau). \end{aligned}$$

Como podemos observar, para valores fijos de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  cuando uno de ellos es cero, el comportamiento asintótico de (5.6) para valores grandes de  $\tau$  consiste en un función oscilante con un factor  $\sqrt{\log\tau}$ . Asimismo, nótese que la parte oscilante es precisamente la misma que aparecía en el desarrollo asintótico en  $\tau$  de la función de dos puntos. Para  $\rho_1$  y  $\rho_2$  diferentes de cero, el desarrollo asintótico está dado por factores que son puramente oscilatorios en  $\tau$  y, de nuevo, tenemos esa coincidencia con el caso de la función de dos puntos. Por otro lado, observamos que el valor del propagador de Newton-Wigner en el eje crece (aunque muy despacio) y que tiene una amplitud constante en los demás sitios. Así pues, aquí también tenemos una probabilidad alta de encontrar la partícula cerca del eje de simetría en comparación con el resto del espacio.

Podemos comparar este resultado con el correspondiente a un campo escalar libre con simetría axial en 2+1 dimensiones. Así, para la región que nos interesa ahora (valores grandes de  $\tau$ , es decir,  $\tau > \rho_1 + \rho_2$ ) el desarrollo del propagador de Newton-Wigner para el caso libre es:

$$\frac{2\tau}{\pi[(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2]\sqrt{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}} E\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}}\right).$$

Se observa que para valores grandes de  $\tau$  decae a cero como  $-1/\tau^2$ , mucho más rápido que el desarrollo asintótico para el caso completo. De nuevo, podemos interpretar este resultado

como una mayor probabilidad de encontrar el cuanto del campo escalar en las proximidades del eje de simetría.

Aunque las expresiones analíticas que hemos obtenido son diferentes de las que corresponden a la función de dos puntos, las conclusiones sobre el comportamiento de la amplitud de probabilidad cerca del eje de simetría son las mismas. Esto sugiere fuertemente que estamos observando un efecto gravito-cuántico genuino. La diferencia más significativa que hemos encontrado entre los dos resultados (la función de dos puntos y el propagador de Newton-Wigner) es que la probabilidad en el eje decae muy lentamente si uno considera la función de dos puntos, mientras que crece lentamente si se considera el propagador de Newton-Wigner. Sin embargo, esto no es alarmante debido al carácter aproximado del resultado para la función de dos puntos y la necesidad de encontrar probabilidades sobre regiones del espacio-tiempo. De hecho, consideraremos esto en la siguiente sección cuando estudiemos la evolución de funciones de onda construidas a partir de los estados de Newton-Wigner.

### 5.2.3. Desarrollo asintótico para valores grandes de $\rho_1$ , $\rho_2$ y $\tau$

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico de (5.6) en el “límite clásico” correspondiente a tomar valores simultáneamente grandes  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , y  $\tau$  (manteniendo sus valores relativos, tal y como se hizo para la función de dos puntos).

Procedemos de forma análoga a la que se hizo en el capítulo 4 (siguiendo las técnicas expuestas en el apéndice C) y, de esta forma, obtenemos el término principal del desarrollo y las primeras correcciones del mismo. Como en aquel caso, el resultado será diferente según la región considerada (ver figura 4.1). Así, el término principal del desarrollo viene dado por

$$\text{Región I: } \frac{2i\tau}{\pi[(\rho_1 - \rho_2)^2 - \tau^2]\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} E\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) \quad (5.7a)$$

$$\text{Región II: } \frac{\tau}{\pi[(\rho_1 - \rho_2)^2 - \tau^2][(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2]\sqrt{\rho_1\rho_2}} \times \quad (5.7b)$$

$$\left\{ [(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2] K\left(\sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}{4\rho_1\rho_2}}\right) - 4\rho_1\rho_2 E\left(\sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}{4\rho_1\rho_2}}\right) \right. \\ \left. + i[(\rho_1 - \rho_2)^2 - \tau^2] K\left(\sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}{4\rho_1\rho_2}}\right) + 4i\rho_1\rho_2 E\left(\sqrt{\frac{(\rho_2 + \rho_1)^2 - \tau^2}{4\rho_1\rho_2}}\right) \right\}$$

$$\text{Región III : } \frac{2\tau}{\pi[(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2]\sqrt{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}} E\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}}\right) \quad (5.7c)$$

y la primera corrección asintótica es

$$\text{Región I : } \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \left[ \frac{2}{\pi\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} K\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) \right] \quad (5.8a)$$

$$\text{Región II : } \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}|\rho_1 - \rho_2|} \quad (5.8b)$$

$$\text{Región III : } \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{|\rho_1 - \rho_2|}} + \frac{e^{-i\left[\frac{\pi}{4} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)(1 + \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2})\right]}}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2}} \right\}. \quad (5.8c)$$

La expresión correspondiente a la región I puede escribirse de forma explícita en términos de funciones elípticas de primera y segunda especie con coeficientes que son raíces cuadradas de funciones racionales en las que aparecen  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , y  $\tau$ ; pero hemos preferido escribirla de la forma más compacta presentada arriba, en términos de derivadas de la función K. Al igual que antes, la contribución principal coincide con el propagador de Newton-Wigner para un campo escalar simétrico con simetría axial en 2+1 propagándose en un fondo minkowskiano. En el caso en que bien  $\rho_1$  ó  $\rho_2$  son cero, el desarrollo asintótico queda

$$\theta(\rho - \tau) \left[ \frac{i\tau}{(\rho^2 - \tau^2)^{3/2}} + \frac{3\tau^2(3\rho^2 + 2\tau^2)}{2(\rho^2 - \tau^2)^{7/2}} \right] + \theta(\tau - \rho) \left[ -\frac{\tau}{(\tau^2 - \rho^2)^{3/2}} + \frac{1}{\rho} e^{i(\rho - \tau + \rho \log \frac{\tau}{\rho})} \sqrt{\log \frac{\tau}{\rho}} \right]$$

donde, como anteriormente,  $\rho$  es el parámetro radial no nulo. Nótese que esta última expresión no se obtiene simplemente introduciendo  $\rho_1 = 0$  ó  $\rho_2 = 0$  en (5.7,5.8).

El aspecto más interesante del propagador es su comportamiento en el eje y en  $\rho_1 = \rho_2$  (véanse figuras 5.1 y 5.2). Veamos primero el comportamiento en  $\rho_1 = \rho_2$ . Aquí encontramos la singularidad esperada, debida a la propiedad de ortogonalidad de los vectores de Newton-Wigner, que se puede identificar con la función delta que aparece en (5.5). Además, observamos una clara tendencia de la amplitud de probabilidad a mantenerse concentrada alrededor de la región  $\rho_1 = \rho_2$ . Interpretamos esto como un efecto de autogravedad que tiende a favorecer la concentración de materia. Por otra parte, la deslocalización de la amplitud de probabilidad puede interpretarse como un efecto similar al de los fenómenos de difusión en Mecánica Cuántica usual. En el eje  $\rho_1 = 0$  ( $\rho_2 = 0$ ) observamos que una vez que la amplitud ha crecido como consecuencia del colapso gravitatorio de la distribución inicial de materia hay una tendencia a que la probabilidad de encontrar la partícula en esa



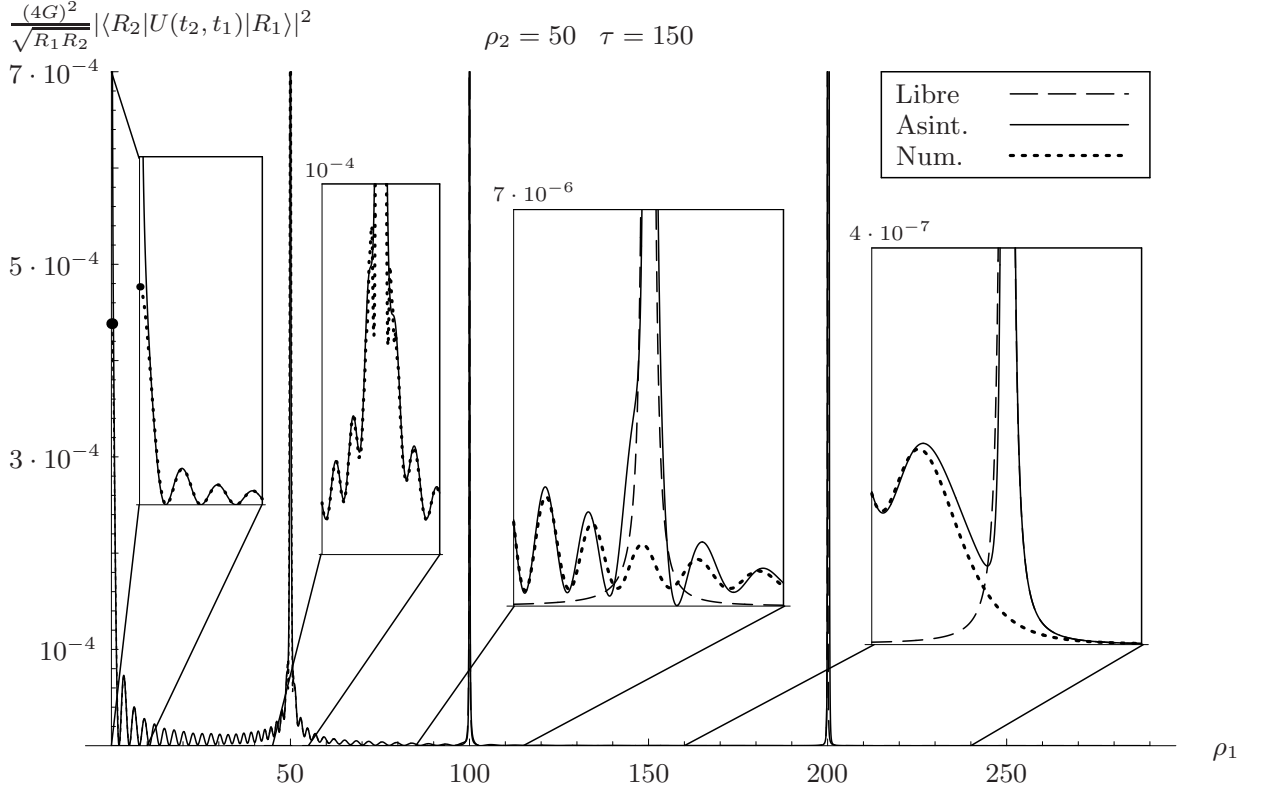


Figura 5.1: En esta figura se representa el módulo al cuadrado del propagador de Newton-Wigner (dividido por factores de  $R_{1,2}$  introducidos para la comparación con la función de dos puntos tratada en la figura 4.2). Se pueden apreciar varias características muy interesantes:

- Un aumento de la amplitud de probabilidad en el eje similar al que ya vimos en el caso de la función de dos puntos.
- Una gran amplitud en  $\rho_1 = \rho_2$ , incluso cuando se excluye la función delta; interpretamos este hecho como un efecto de autogravedad en una región con alta densidad de materia.
- A partir de la posición dada por  $\rho_1 = 200$  la amplitud decae muy rápido; éste es el sitio que marca la posición del cono de luz.

Nótese que a pesar de que la amplitud en el caso “libre” –correspondiente a la propagación de un campo escalar sin masa con simetría axial en Minkowski– diverge en algunas regiones del plano  $(\rho, \tau)$ , ésta se mantiene finita en nuestro modelo gravito-cuántico.

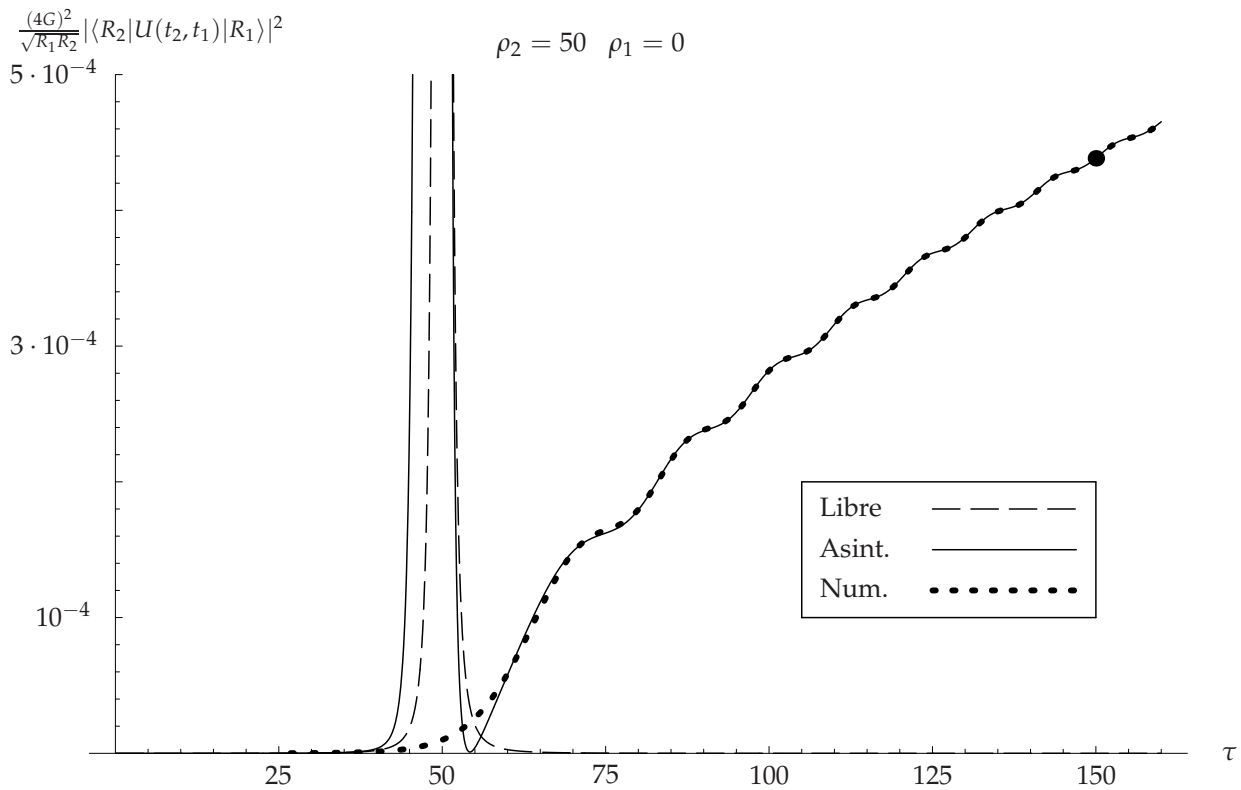


Figura 5.2: En esta figura se representa el módulo al cuadrado del propagador de Newton-Wigner (dividido por factores de  $R_{1,2}$ ) en el eje. El punto resaltado corresponde al valor en el eje mostrado en la figura 5.1.

posición sea alta (de hecho la amplitud crece). Con objeto de estudiar cómo evoluciona la probabilidad de encontrar los cuantos del campo escalar cerca del eje de simetría consideraremos en la siguiente sección la evolución de auténticas funciones de onda normalizables y confirmaremos que la probabilidad en el eje aumenta y después decae muy lentamente. Estos efectos tienen cierta relación con lo que se esperaría encontrar en el estudio del colapso gravitatorio y posterior evaporación de un agujero negro<sup>6</sup>.

Es importante comparar los resultados obtenidos en esta sección con los que ya teníamos para la función de dos puntos y para el campo escalar libre sin masa con simetría axial. En lo que a la función de dos puntos se refiere, hacemos notar que, cualitativamente, hay una gran semejanza; se observa en ambos casos una mayor probabilidad de encontrar la partícula en el eje, la singularidad en el punto  $\rho_1 = \rho_2$ , y el movimiento a lo largo de geodésicas radiales nulas de la métrica de Minkowski auxiliar (que se manifiesta en la significativa probabilidad de encontrar la partícula en el cono de luz “clásico”). Cuando los resultados se comparan

<sup>6</sup>Aquí la mayor diferencia es la aparente ausencia de un horizonte o de algún objeto geométrico que se comporte, al menos de una forma aproximada, como uno.

con el caso “libre”, observamos que los fenómenos gravitatorios que hemos interpretado como un aumento de la probabilidad debidos a un comportamiento autogravitatorio no aparecen, pero los relacionados con la estructura causal y la microcausalidad (amplitud de probabilidad grande en los conos de luz) del sistema sí que coinciden.

### 5.3. Función de onda en el espacio de posiciones

Haciendo uso de los estados de Newton-Wigner  $|R\rangle$  es posible construir la función de onda  $\Psi(R, t) = \langle R|\Psi(t)\rangle$ , donde los estados  $|\Psi(t)\rangle$  pertenecen al espacio de Hilbert de una partícula. Utilizaremos este tipo de estados a modo de *partículas de prueba* para estudiar la geometría del sistema gravitatorio cuantizado. A partir del propagador de Newton-Wigner, obtenemos que la evolución de la función de onda  $\Psi(R, t)$  viene dada por

$$\begin{aligned}\Psi(R, t) &= \langle R|\hat{U}(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle = \int_0^\infty \Psi(\tilde{R}, t_0) \langle R|\hat{U}(t, t_0)|\tilde{R}\rangle d\tilde{R} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty k \sqrt{R\tilde{R}} J_0(kR) J_0(k\tilde{R}) \exp[-i(t - t_0)E(k)] \Psi(\tilde{R}, t_0) d\tilde{R} dk.\end{aligned}\quad (5.9)$$

En lo que sigue utilizaremos la ecuación (5.9) para estudiar la evolución de ciertas funciones de onda en el espacio de Hilbert de una partícula. Éstas serán interpretadas, de hecho, como partículas de prueba cuánticas que usaremos para describir la geometría del espacio-tiempo que estamos considerando. En principio, podemos elegir cualquier función inicial  $\Psi(R, t_0)$ . Sin embargo, para poder obtener expresiones cerradas para la función de onda (o al menos, lo más sencillas posible) nos concentraremos en una elección concreta que tiene varias propiedades útiles para nuestros propósitos: nos da la posibilidad de tener control sobre la posición del pico de la distribución de probabilidad, podemos controlar la anchura del paquete de ondas y, por último, es lo suficientemente simple como para que podamos resolver exactamente algunas de las integrales y obtener una forma cerrada manejable para la evolución. Una posible opción de función normalizada que satisface estos requerimientos en  $t_0$  es

$$\Psi(R, t_0) = \sqrt{\frac{2R}{r_2^2 - r_1^2}} \chi_{[r_1, r_2]}(R) \quad (\text{con } r_2 > r_1),$$

donde  $\chi_V$  es la función característica del conjunto  $V$ . En este caso la evolución de la función de onda viene dada por

$$\Psi(R, t) = \sqrt{\frac{2R}{r_2^2 - r_1^2}} \int_0^\infty J_0(kR) [r_2 J_1(kr_2) - r_1 J_1(kr_1)] \exp[-i(t - t_0)E(k)] dk.$$

Es conveniente, como hemos hecho anteriormente, reescribir esta expresión en términos de parámetros adimensionales (introducidos de forma análoga a los utilizados más arriba)

definidos por  $\rho = \frac{R}{4G}$ ,  $\sigma_2 = \frac{r_2}{4G}$ ,  $\sigma_1 = \frac{r_1}{4G}$ ,  $\tau = \frac{t-t_0}{4G}$  y el cambio de variable de integración  $q = 4Gk$ . Escribiendo  $\psi(\rho, \tau) := \Psi(4G\rho, 4G\tau + t_0)$  obtenemos, finalmente,

$$\psi(\rho, \tau) = \sqrt{\frac{2\rho}{4G(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}} \int_0^\infty J_0(q\rho) [\sigma_2 J_1(q\sigma_2) - \sigma_1 J_1(q\sigma_1)] \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq \quad (5.10)$$

que satisface, para todo  $\tau$ , la condición de normalización

$$4G \int_0^\infty |\psi(\rho, \tau)|^2 d\rho = 1.$$

Es sencillo comprobar que para  $\tau = 0$  recuperamos la función de onda inicial (en  $t = t_0$ ). Ahora, nos interesa extraer información sobre la evolución de esta función de onda. En particular, queremos estudiar el comportamiento cerca del eje de simetría para ver si el aumento de probabilidad sugerido por el análisis de la función de dos puntos y del propagador de Newton-Wigner sigue presente en este caso. Nos interesa también saber si la evolución de la función de onda define de alguna forma una trayectoria clásica en el espacio-tiempo que pueda ser usada para definir aproximadamente una noción física de geodésicas. Finalmente, queremos comparar el resultado con el obtenido para el caso del campo escalar sin masa con simetría axial (tal y como se ha hecho en el capítulo 4 y en la sección 5.2 para la función de dos puntos y el propagador). De esta forma podremos diferenciar los efectos que provienen de la cuantización de la gravedad propiamente dicha y no de otras posibles causas como la simetría o la dimensión del espacio-tiempo. Al igual que en las secciones anteriores, haremos uso de desarrollos asintóticos en los diferentes regímenes para extraer el comportamiento de  $\psi(\rho, \tau)$ .

### 5.3.1. Desarrollo asintótico en $\rho$

Para valores grandes de  $\rho$  el comportamiento asintótico de (5.10) es

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{4G}} \frac{\tau}{\rho^{3/2}} \left\{ i + \frac{9}{2\rho^2} \left[ -\frac{i}{3} + \tau + \frac{i\tau^2}{3} + \frac{9}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right] \right\} + O(\rho^{-9/2})$$

obtenido, de nuevo, aplicando las técnicas basadas en la transformación de Mellin descritas en el apéndice C. Cuando comparamos este resultado con el que se encuentra para la evolución de la misma función de onda para el caso de un campo escalar libre sin masa con simetría axial en Minkowski

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{4G}} \frac{\tau}{\rho^{3/2}} \left\{ i + \frac{9}{2\rho^2} \left[ \frac{i\tau^2}{3} + \frac{9}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right] \right\} + O(\rho^{-9/2})$$

observamos que el comportamiento lejos del eje ( $\rho$  grande y para  $\tau$  fijo) es el mismo en los dos casos.

### 5.3.2. Desarrollo asintótico en $\tau$

En principio tenemos que considerar solamente la situación en la que  $\rho \neq 0$  porque  $\psi(0, \tau) = 0$ . Escribimos la función de onda de la forma

$$\psi(\rho, \tau) = \sqrt{\frac{2\rho}{4G(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}} [\sigma_2 F(\rho, \tau, \sigma_2) - \sigma_1 F(\rho, \tau, \sigma_1)],$$

con

$$F(\rho, \tau, \sigma) := \int_0^\infty J_0(\rho q) J_1(\sigma q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq. \quad (5.11)$$

El comportamiento asintótico en  $\tau$  (obtenido de forma análoga a las utilizadas anteriormente) para la integral  $F(\rho, \tau, \sigma) \sim S(\rho, \tau, \sigma)$  viene dado por

$$\begin{aligned} S(\rho, \tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho\sigma}\log\tau} \bigg\{ & -\exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho + \sigma) + i[-\tau + (\rho + \sigma)\log\tau]\right) \Gamma[-i(\rho + \sigma)] \\ & -\exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho + \sigma) - i\left[\frac{\pi}{2}\tau + (\rho + \sigma)\log\tau\right]\right) \Gamma[i(\rho + \sigma)] \\ & +\exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho - \sigma) + i[-\tau + (\rho - \sigma)\log\tau + \frac{\pi}{2}]\right) \Gamma[i(\sigma - \rho)] \\ & +\exp\left(\frac{\pi}{2}(\sigma - \rho) - i[\tau + (\rho - \sigma)\log\tau + \frac{\pi}{2}]\right) \Gamma[i(\rho - \sigma)] \bigg\} + O(1/\log^2\tau), \end{aligned}$$

por lo que tenemos que el desarrollo asintótico de  $\psi(\rho, \tau)$  tiene la forma

$$\psi(\rho, \tau) \sim \sqrt{\frac{2\rho}{4G(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}} [\sigma_2 S(\rho, \tau, \sigma_2) - \sigma_1 S(\rho, \tau, \sigma_1)]. \quad (5.12)$$

Esta expresión muestra el lento decaimiento en el tiempo característico del sistema.

Como antes, se puede comparar con el correspondiente al campo escalar sin masa libre con simetría axial en Minkowski que, para valores grandes de  $\tau$  viene dado por<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\rho}{4G(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}} \bigg[ & \frac{(\rho + \sigma_2 - \tau) \Pi\left(\frac{2\rho}{\rho - \sigma_2 + \tau} \middle| \sqrt{\frac{4\rho\sigma_2}{\tau^2 - (\rho - \sigma_2)^2}}\right) - \sigma_2 K\left(\sqrt{\frac{4\rho\sigma_2}{\tau^2 - (\sigma_2 - \rho)^2}}\right)}{\sqrt{\tau^2 - (\sigma_2 - \rho)^2}} \\ & - \frac{(\rho + \sigma_1 - \tau) \Pi\left(\frac{2\rho}{\rho - \sigma_1 + \tau} \middle| \sqrt{\frac{4\rho\sigma_1}{\tau^2 - (\rho - \sigma_1)^2}}\right) - \sigma_1 K\left(\sqrt{\frac{4\rho\sigma_1}{\tau^2 - (\sigma_1 - \rho)^2}}\right)}{\sqrt{\tau^2 - (\sigma_1 - \rho)^2}} \bigg] \end{aligned}$$

y decae a cero como

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2\tau^2} \sqrt{\frac{2\rho}{4G(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}}.$$

---

<sup>7</sup>Recuérdese que la integral elíptica de tercera especie es  $\Pi(n|k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ .

El comportamiento de la función de onda en  $\tau$  nos indica que si la probabilidad de encontrar la partícula cerca del eje en un cierto instante es apreciable, el valor de la misma se mantendrá alto por un intervalo grande en  $\tau$ . De hecho, esto es lo que ocurre, tal y como se puede observar en la figura 5.4. Para finalizar, es interesante notar que en el caso libre el decaimiento de la amplitud de probabilidad en la dirección de  $\tau$  es mucho más rápido que el que tiene lugar en nuestro caso (dado por el desarrollo asintótico 5.12).

### 5.3.3. Desarrollo asintótico para $\rho$ , $\sigma$ y $\tau$ simultáneamente grandes

Trataremos ahora la obtención de un desarrollo asintótico válido en el límite “clásico” correspondiente a tomar  $\rho$  y  $\tau$  grandes conservando sus valores relativos (tal y como hemos hecho en las secciones anteriores). También tomaremos los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , que definen el soporte de la función de onda en el tiempo inicial, grandes en comparación con la longitud característica del sistema  $4G$ . Esto nos permitirá usar el mismo tipo de técnicas asintóticas que ya hemos utilizado.

Consideraremos la función  $F(\rho, \tau, \sigma)$  definida en (5.11). Así, siguiendo técnicas análogas a las desarrolladas en el apéndice C obtendremos expresiones para el desarrollo asintótico de la misma, es decir, el desarrollo de la integral

$$\int_0^\infty J_0(\rho q) J_1(\sigma q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq$$

en las diferentes regiones descritas en la figura 4.1. De esta forma, el término principal del desarrollo, que coincide con la integral del caso libre

$$\int_0^\infty J_0(\rho q) J_1(\sigma q) \exp(-i\tau q) dq$$

viene dado por:

$$|\rho - \sigma| > \tau:$$

$$\frac{\text{sgn}(\sigma - \rho)}{\sigma} + \frac{2i \left[ \sigma K \left( \sqrt{\frac{4\rho\sigma}{(\rho+\sigma)^2 - \tau^2}} \right) + (\rho - \sigma - \tau) \Pi \left( \frac{2\rho}{\rho + \sigma + \tau} \middle| \sqrt{\frac{4\rho\sigma}{(\rho+\sigma)^2 - \tau^2}} \right) \right]}{\pi\sigma\sqrt{(\rho + \sigma)^2 - \tau^2}} \quad (5.13a)$$

$$|\rho - \sigma| < \tau < \rho + \sigma:$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} + \frac{i(\rho + \tau) \left[ iK \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho - \sigma)^2}{4\rho\sigma}} \right) - K \left( \sqrt{\frac{(\rho + \sigma)^2 - \tau^2}{4\rho\sigma}} \right) \right]}{\pi\sigma\sqrt{\rho\sigma}} \\ & + \frac{i \left[ (\rho + \sigma + \tau)K \left( \sqrt{\frac{(\rho + \sigma)^2 - \tau^2}{4\rho\sigma}} \right) + (\rho - \sigma - \tau)\Pi \left( \frac{\rho + \sigma - \tau}{2\sigma} \middle| \sqrt{\frac{(\rho + \sigma)^2 - \tau^2}{4\rho\sigma}} \right) \right]}{\pi\sigma\sqrt{\rho\sigma}} \\ & - \frac{(\rho + \sigma - \tau)\Pi \left( \frac{\rho - \sigma + \tau}{2\rho} \middle| \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho - \sigma)^2}{4\rho\sigma}} \right) - 2\rho K \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho - \sigma)^2}{4\rho\sigma}} \right)}{\pi\sigma\sqrt{\rho\sigma}} \end{aligned} \quad (5.13b)$$

$$\rho + \sigma < \tau:$$

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{2 \left[ (\rho + \sigma - \tau)\Pi \left( \frac{2\rho}{\rho - \sigma + \tau} \middle| \sqrt{\frac{4\rho\sigma}{\tau^2 - (\rho - \sigma)^2}} \right) - \sigma K \left( \sqrt{\frac{4\rho\sigma}{\tau^2 - (\rho - \sigma)^2}} \right) \right]}{\pi\sigma\sqrt{\tau^2 - (\sigma - \rho)^2}}; \quad (5.13c)$$

y las primeras correcciones de este desarrollo asintótico son:

$$\begin{aligned} & \theta(\tau - \sigma - \rho) \frac{\exp \left( i \left[ -\tau + (\rho + \sigma) \left( 1 + \log \frac{\tau}{\rho + \sigma} \right) - \frac{3\pi}{4} \right] \right)}{\sqrt{2\pi\sigma\rho(\sigma + \rho)} \log \frac{\tau}{\rho + \sigma}} \\ & + \theta(\tau - \sigma + \rho) \theta(\sigma - \rho) \frac{\exp \left( i \left[ -\tau + (\sigma - \rho) \left( 1 + \log \frac{\tau}{\sigma - \rho} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \right)}{\sqrt{2\pi\sigma\rho(\sigma - \rho)} \log \frac{\tau}{\sigma - \rho}} \\ & + \theta(\tau + \sigma - \rho) \theta(\rho - \sigma) \frac{\exp \left( i \left[ -\tau + (\rho - \sigma) \left( 1 + \log \frac{\tau}{\rho - \sigma} \right) + \frac{3\pi}{4} \right] \right)}{\sqrt{2\pi\sigma\rho(\rho - \sigma)} \log \frac{\tau}{\rho - \sigma}}. \end{aligned}$$

Introduciendo estas expresiones en (5.10) obtenemos finalmente la aproximación asintótica que buscábamos para la función de onda en el límite cuando todas las longitudes son mucho mayores que  $4G$ .

Estos desarrollos asintóticos nos permiten explorar diferentes posibilidades según la anchura y la posición del soporte de la función de onda en  $t = t_0$ . Podemos considerar los casos en los que el soporte –en la escala definida por  $4G$ – sea ancho o estrecho.<sup>8</sup> En el primer caso la función de onda evoluciona de forma que se asemeja a la propagación de la correspondiente función de onda para un campo escalar sin masa libre con simetría

<sup>8</sup>El propagador de Newton-Wigner  $\langle R_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | R_1 \rangle$  corresponde al límite en el que el soporte es infinitamente estrecho.

axial en Minkowski. Se puede comprobar fácilmente que la amplitud de probabilidad para valores grandes de  $\rho$  está concentrada a lo largo de las líneas definidas por  $\tau = \rho_0 + \rho$  y por  $\tau = \rho - \rho_0$  en el plano  $(\rho, \tau)$ . Estas dos líneas definen trayectorias que pueden ser interpretadas como geodésicas nulas de una métrica espacio-temporal emergente. Nótese que éstas se encuentran definidas con una resolución del orden de la anchura del soporte inicial de la función de onda (véase figura 5.3). El otro caso describe una situación en la que la densidad de materia es alta y muestra un comportamiento que puede ser interpretado como un efecto de autogravedad (ver figura 5.4). Se aprecia también en este caso que, especialmente cuando el soporte inicial está cerca del eje, hay un aumento de la amplitud de probabilidad en  $\rho = 0$  que decae muy lentamente con el tiempo. Este comportamiento, como ya se ha visto, es característico del modelo que estamos estudiando. Esto quiere decir, en concreto, que la probabilidad de encontrar la partícula cerca del eje se mantiene alta por mucho tiempo y, como consecuencia, la probabilidad de encontrarla en las trayectorias que marcarían las geodésicas es mucho menor. Esto se muestra en la figura 5.4.

Como ya hemos discutido en el caso de la función de dos puntos y del propagador de Newton-Wigner, hay un aumento significativo de la probabilidad de encontrar cuantos del campo escalar cerca del eje. Esto se puede ver en la comparación de esta función de onda con la correspondiente al campo escalar libre (sin masa y con simetría axial). Tal y como muestran los desarrollos asintóticos (y como reflejan claramente las figuras) la probabilidad cerca del eje es mayor en el caso con gravedad si el soporte de la función de onda inicial es estrecho. Otra característica interesante que se puede observar es la persistencia de la probabilidad (a modo de huella) de la función de onda en el rango de  $\rho$  donde estaba el soporte inicial de la misma. El origen de este efecto se puede entender fácilmente si tenemos en cuenta que es posible escribir el propagador de Newton-Wigner (5.5) como la suma de una función delta multiplicada por una fase dependiente del tiempo y una integral que converge rápidamente.



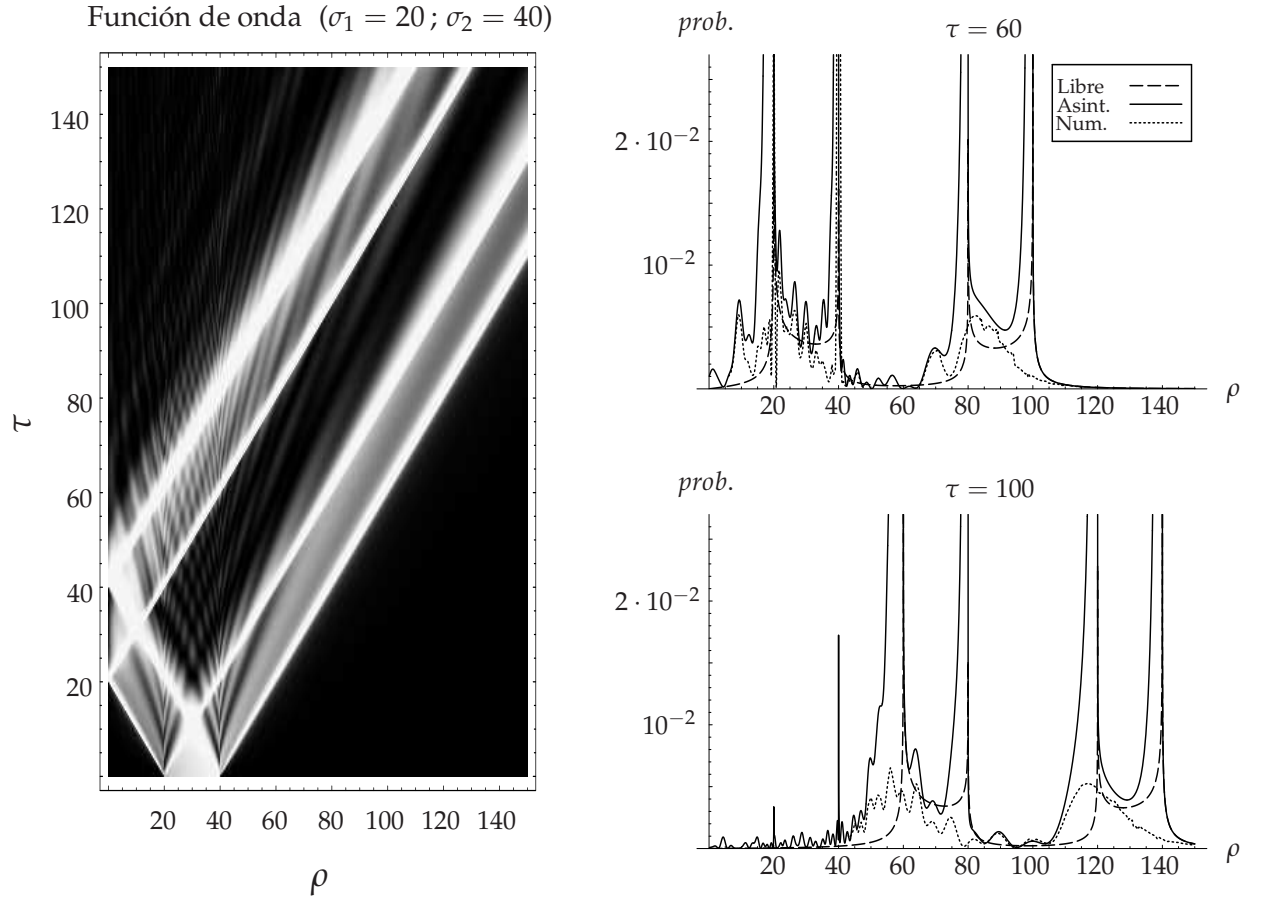


Figura 5.3: Densidad de probabilidad para una función de onda con soporte inicial ancho. La figura se ha obtenido utilizando los desarrollos asintóticos discutidos en el texto para evitar lentas integraciones numéricas. Las áreas blancas (saturadas) corresponden a las divergencias que presentan los desarrollos asintóticos de este tipo en los cambios de región, sin embargo, estas divergencias no son físicas (no están presentes en la auténtica función de onda calculada numéricamente). Esto se puede ver en las secciones representadas a la derecha de la figura. Nótese que en este caso las dos curvas nulas que señalan el cono de luz están bien definidas —mucho mejor que en el caso estrecho presentado en la figura 5.4— y la probabilidad dentro del cono de luz o en el eje disminuye notablemente a medida que  $\tau$  crece.

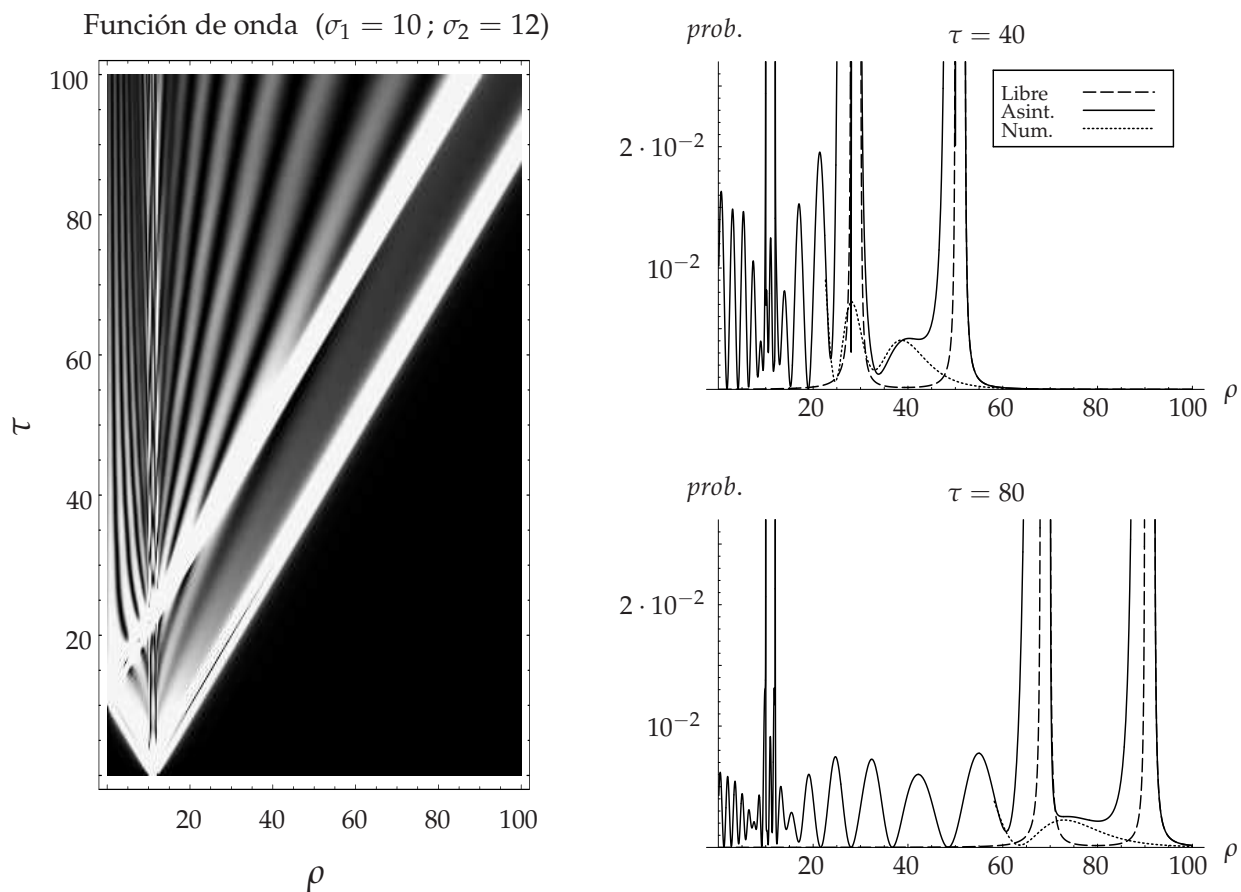


Figura 5.4: Densidad de probabilidad para una función de onda con soporte inicial estrecho. Se puede observar el aumento de la probabilidad cerca del eje así como la aparición de la estructura de cono de luz.

# Capítulo 6

## Estados coherentes

Es razonable asumir que una teoría completa de la gravedad cuántica tenga un sector semiclásico lo suficientemente grande como para que podamos reconstruir el comportamiento clásico de los sistemas gravitatorios en los límites apropiados. En este sentido, sería deseable contar con un conjunto de vectores en el espacio de Hilbert físico de esta teoría tal que los valores esperados de los observables que describan la geometría espacio-temporal coincidan con las predicciones de la relatividad general para sus homólogos clásicos. Por ejemplo, sería muy interesante disponer de una familia de estados para los cuales el valor esperado de un cierto operador métrico satisficiera las ecuaciones de Einstein, quizás con algunas correcciones cuánticas.

Más concretamente, centrándonos en las ondas de Einstein-Rosen, en caso de disponer de “estados coherentes” para este sistema podríamos tomar vectores de la forma  $|C\rangle^0 \otimes (\bigotimes_{I=1}^n |k\rangle^I)$  (con  $|C\rangle^0$  un estado coherente del sector gravitatorio) para estudiar los objetos que hemos considerado en los capítulos anteriores. Con estados de este tipo, se podría estudiar el límite semiclásico de manera análoga a la que hemos seguido anteriormente utilizando estados  $|0\rangle^0 \otimes |k\rangle^1$  (para un único escalar de materia), solo que ahora este límite no sería, en principio, el correspondiente a un espacio-tiempo de Minkowski sino el dado por la solución clásica de las ondas de Einstein-Rosen (un espacio-tiempo curvo) que corresponda al estado coherente  $|C\rangle^0$ .

Por otra parte, como es bien sabido, los estados coherentes tienen un papel muy relevante en los sistemas de osciladores armónicos acoplados, incluyendo las teorías de campos libres, que se pueden interpretar como modelos que constan de un número infinito de ellos. Estos estados presentan un comportamiento muy interesante ya que, de algún modo, son el eslabón entre los estados con un comportamiento puramente cuántico y las soluciones clásicas de las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, el problema de encontrar estados coherentes

para sistemas diferentes del oscilador armónico es un problema arduo para el que no existe una solución en general (de hecho, se desconocen estados coherentes incluso para sistemas tan importantes como el átomo de hidrógeno). En este capítulo veremos que, en general, ni siquiera es posible encontrar estados coherentes en el sentido habitual para Hamiltonianos que son funciones del Hamiltoniano del oscilador armónico o, por extensión, como en el caso de las ondas de Einstein-Rosen, para aquéllos que se describen funcionalmente en términos de teorías de campos libres.

Finalmente, hacemos notar que el hecho de que para los observadores de la región asintótica del espacio-tiempo de las ondas de Einstein-Rosen la dinámica esté tan cercana a la dada por el Hamiltoniano  $H_0$ , sugiere que quizás algunos resultados correspondientes a la teoría libre puedan ser exportados a la teoría completa de forma aproximada pero satisfactoria. Éste será el propósito de la última sección del presente capítulo, donde obtendremos información cuantitativa sobre los estados coherentes de la teoría libre bajo la dinámica completa. Sin embargo, no obtendremos conclusiones esperanzadoras en lo que se refiere al uso de estados coherentes del Hamiltoniano  $H_0$  como aproximación a los que serían auténticos estados coherentes de la dinámica completa.

## 6.1. Sistemas $f(H_0)$

En esta sección discutiremos la evolución tanto clásica como cuántica de sistemas generales descritos por un Hamiltoniano  $H$  que es función de uno libre  $H_0$  (como es el caso de las ondas de Einstein-Rosen).

Como veremos, a pesar de las semejanzas de los dos sistemas (el descrito por  $H$  y el descrito por  $H_0$ ) a un nivel clásico, la evolución cuántica presenta importantes diferencias. En particular, éstas serán el mayor obstáculo a la hora de construir estados coherentes para el Hamiltoniano  $H$ .

Hacemos notar que este tipo de Hamiltonianos funcionalmente dependientes de uno libre no sólo aparecen en las reducciones de simetría de relatividad general sino también (al menos) en el contexto de la óptica cuántica [162, 163]. Concretamente, la propagación de la luz en medios de Kerr –aquellos con un índice de refracción con una componente que depende de la intensidad del campo eléctrico en cuestión– están descritos (para un único modo y en la aproximación de pérdidas bajas) por un Hamiltoniano de la forma:

$$\hat{H} = \chi(\hat{N}^2 - \hat{N}) = \chi:\hat{N}^2: = \chi \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2,$$

donde  $\chi$  está relacionada con la susceptibilidad del medio. Como vemos, el Hamiltoniano

es una función (aunque en este caso polinómica, al contrario de lo que sucede en el sistema de las ondas de Einstein-Rosen) del operador número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ .

En concreto nos centraremos en el caso en el que  $H_0$  es el Hamiltoniano del oscilador armónico. En lo que sigue, haremos un tratamiento general de la dinámica de este tipo de sistemas con un Hamiltoniano  $H = f(H_0)$ .

### 6.1.1. Tratamiento clásico

Primeramente discutiremos la solución clásica para  $H_0 = \frac{1}{2}(p_0^2 + x_0^2)$ . La dinámica generada por  $H_0$  está dada por las ecuaciones

$$\frac{dx_0}{dT} = p_0, \quad \frac{dp_0}{dT} = -x_0.$$

Aquí denotamos el parámetro temporal como  $T$  porque después compararemos dos tipos de dinámicas diferentes (la dada por  $H_0$  y la descrita por  $f(H_0)$ ) donde habrá dos parámetros temporales relevantes. La solución general de estas ecuaciones se puede escribir como:

$$x_0(T) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ae^{-iT} + \bar{a}e^{iT}), \quad (6.1a)$$

$$p_0(T) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(ae^{-iT} - \bar{a}e^{iT}), \quad (6.1b)$$

donde  $a$  y su complejo conjugado, denotado por  $\bar{a}$ , están fijados por las condiciones iniciales (en  $T = 0$ )

$$a = \frac{x_0 + ip_0}{\sqrt{2}}.$$

Basándonos en esta última expresión, resulta útil introducir una variable compleja  $z_0 = x_0 + ip_0$  para describir las posiciones y los momentos simultáneamente. En particular, las ecuaciones (6.1) se pueden escribir como

$$z_0(T) = z_0 e^{-iT}.$$

De esta forma, las trayectorias en el espacio de fases, descritas ahora en el plano complejo  $z$ , son circunferencias centradas en el origen con radio  $|z_0| = \sqrt{x_0^2 + p_0^2} = \sqrt{2H_0}$ .

Consideramos ahora las soluciones para  $H = f(H_0)$ . Para tener ecuaciones del movimiento bien definidas, requeriremos que la función  $f$  sea diferenciable. Entonces, las ecuaciones del movimiento en este caso son:

$$\frac{dx}{dt} = \{x, f(H_0)\} = f'(H_0)p, \quad (6.2a)$$

$$\frac{dp}{dt} = \{p, f(H_0)\} = -f'(H_0)x, \quad (6.2b)$$

donde, como es habitual,  $f'$  denota la derivada de  $f$  con respecto a su argumento y  $\{\cdot, \cdot\}$  es el corchete de Poisson. En principio, éste es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que aparenta ser difícil de resolver<sup>1</sup>. Ahora bien, como  $H_0$  es una constante del movimiento,

$$\frac{dH_0}{dt} = p\frac{dp}{dt} + x\frac{dx}{dt} = -f'(H_0)px + f'(H_0)xp = 0,$$

podemos simplificarlas introduciendo un nuevo parámetro temporal

$$T(t) = f'(H_0)t.$$

La reparametrización dada por la ecuación anterior permite transformar las ecuaciones (6.2) en la forma (6.1) correspondiente al oscilador armónico con solución

$$x(t) = x_0(T(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}[ae^{-if'(H_0)t} + \bar{a}e^{if'(H_0)t}], \quad (6.3a)$$

$$p(t) = p_0(T(t)) = \frac{-i}{\sqrt{2}}[ae^{-if'(H_0)t} - \bar{a}e^{if'(H_0)t}]. \quad (6.3b)$$

Nótese que, aunque  $(x(t), p(t))$  tiene el mismo significado físico que  $(x_0(T), p_0(T))$ , son funciones diferentes — $x(t)$  es la composición de  $x_0(T)$  con  $T(t)$ —. Para obtener las ecuaciones (6.3) hemos realizado una redefinición de tiempo dependiente de la energía que conduce a una evolución temporal diferente para cada solución de las ecuaciones del movimiento ( $H_0$  tiene un valor distinto para cada condición inicial). Las órbitas en el espacio de fases para  $H_0$  y  $f(H_0)$  son las mismas si se piensa en ellas como curvas no-parametrizadas. Sin embargo, para  $H_0$  las curvas están parametrizadas por  $T$  mientras que para  $f(H_0)$  están parametrizadas por  $t$ . Así, las soluciones para  $H_0$  tienen todas la misma frecuencia

$$z_0(T) = z_0 e^{-iT},$$

al contrario que las correspondientes a  $f(H_0)$ , que tienen frecuencias que dependen de las condiciones iniciales (a través del valor de  $H_0 = |z_0|^2/2$ )

$$z(t) = z_0 e^{-itf'(H_0)}. \quad (6.4)$$

### 6.1.2. Evolución cuántica

Describiremos ahora brevemente el comportamiento bajo la evolución temporal de un sistema mecano-cuántico cuya dinámica viene descrita por un Hamiltoniano de la forma  $f(\hat{H}_0)$ , donde  $\hat{H}_0$  es el Hamiltoniano usual del oscilador armónico cuántico.

---

<sup>1</sup>Hacemos notar la analogía directa que existe entre este sistema de ecuaciones y el que nos encontramos en las ecuaciones (2.16).

Elegimos como base del espacio de Hilbert del oscilador armónico  $L^2(\mathbb{R})$  los estados  $|n\rangle$  que satisfacen<sup>2</sup>  $\hat{H}_0|n\rangle = (n + 1/2)|n\rangle$ . Entonces, todo estado inicial se puede expresar como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad \text{con} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1,$$

y su evolución viene dada por:

$$|\Psi_0(T)\rangle = e^{-i\hat{H}_0(T-T_0)}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(T-T_0)(n+1/2)}|n\rangle.$$

Consideremos ahora un Hamiltoniano definido por  $\hat{H} = f(\hat{H}_0)$ . Recuértese que para dar sentido a  $f(\hat{A})$  para un operador autoadjunto  $\hat{A}$  genérico es necesario que  $f$  satisfaga las condiciones necesarias para que se puedan aplicar los teoremas espectrales [169]. En nuestro caso, cualquier función definida en el espectro de  $\hat{H}_0$  daría lugar a un Hamiltoniano bien definido pero, puesto que más adelante nos interesará discutir el límite semiclásico, requeriremos que  $f$  sea diferenciable.

Los autoestados  $|n\rangle$  del Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  son también autoestados de  $f(\hat{H}_0)$  con autovalores  $f(n + 1/2)$ . Así, la evolución definida por  $f(\hat{H}_0)$  de un estado  $|\psi\rangle$  está dada por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-if(\hat{H}_0)(t-t_0)}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(t-t_0)f(n+1/2)}|n\rangle.$$

Observamos en la ecuación anterior que la situación no es análoga a la encontrada en el sistema clásico (6.3). En el caso cuántico no se puede obtener  $|\Psi(t)\rangle$  a partir de  $|\Psi_0(T)\rangle$  mediante una simple reparametrización del tiempo, ni siquiera permitiendo que ésta dependa del vector de estado inicial  $|\psi\rangle$ . Esto se debe a que las fases relativas entre autoestados de energía diferentes  $|n\rangle$  cambian en el tiempo y, como consecuencia, se produce una diferencia no trivial entre las funciones de onda bajo la evolución definida por  $\hat{H}_0$  y  $f(\hat{H}_0)$ .

## 6.2. Propiedades de los estados coherentes

Una vez entendida la evolución exacta de cualquier estado para la dinámica  $f(H_0)$ , podemos tratar de encontrar estados semiclásicos que evolucionen cuánticamente de una forma similar a la clásica. A este respecto es importante señalar que, en general, incluso para el oscilador armónico, los paquetes de onda (más concretamente sus módulos al cuadrado) cambian de aspecto a medida que evolucionan en el tiempo [164, 165]. Sin embargo, hay una familia de estados coherentes no-estacionarios cuya función de onda  $\psi$  es tal que  $|\psi|^2$

<sup>2</sup>Recordamos que estamos considerando unidades en las que  $\hbar = 1$ .

no cambia de forma bajo la evolución temporal. Si se representa en una gráfica  $|\psi|^2$  como función del tiempo, se observa que oscila de la misma manera que una partícula sujeta a una fuerza proporcional a la distancia a un punto fijo en el espacio, es decir, un oscilador armónico con Hamiltoniano  $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$ , (véase figura 6.1).

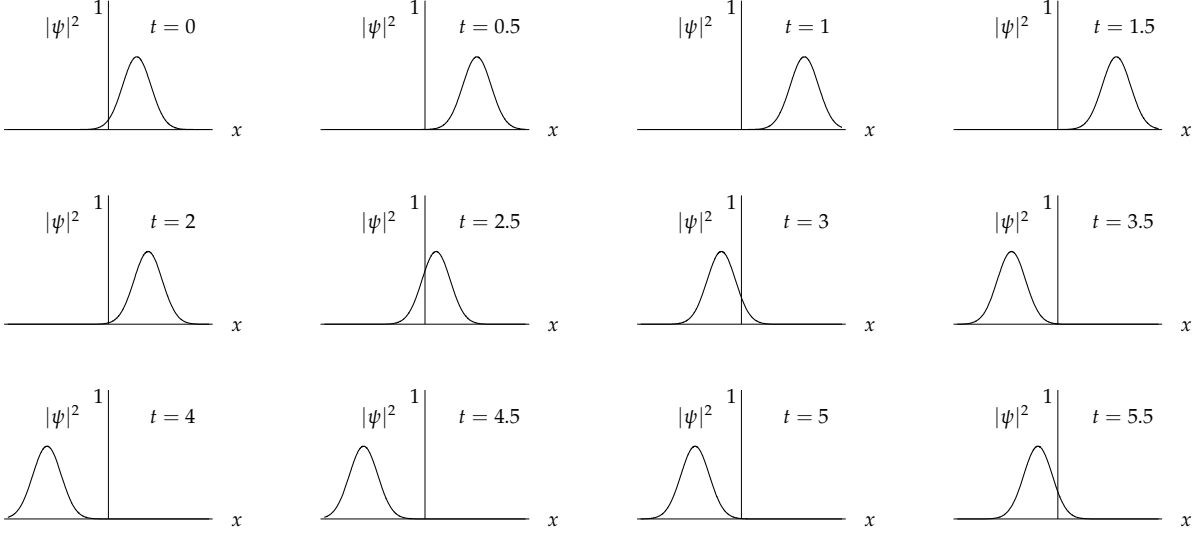


Figura 6.1: Evolución del módulo al cuadrado de la función de onda de un estado coherente para el oscilador armónico.

Estos estados coherentes del oscilador armónico (y sus homólogos para el caso de una teoría de campos libre) presentan una serie de propiedades que los hacen muy interesantes. Entre las más importantes se encuentran las siguientes [164, 166]:

1. Son autoestados del operador de aniquilación  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$  con autovalor complejo  $z$ , cuyas partes real e imaginaria codifican, respectivamente, la posición y el momento inicial del movimiento clásico. En términos de  $z$  y su complejo conjugado  $\bar{z}$  tenemos

$$\begin{aligned}\langle z|\hat{X}|z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{z} + z), \\ \langle z|\hat{P}|z\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{z} - z).\end{aligned}$$

Si comenzamos con la condición de que  $|z\rangle$  es un autoestado de  $\hat{a}$ , es posible llegar a una expresión de  $|z\rangle$  en términos de los autoestados de la energía  $|n\rangle$ :

$$|z\rangle = \exp(-|z|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$



2. Las dispersiones de los operadores posición y momento en estos estados,

$$\langle z|\hat{X}^2|z\rangle - \langle z|\hat{X}|z\rangle^2 = \langle z|\hat{P}^2|z\rangle - \langle z|\hat{P}|z\rangle^2 = \frac{1}{2},$$

son constantes y saturan la desigualdad que define el principio de incertidumbre de Heisenberg (los estados coherentes describen paquetes de onda de mínima dispersión). Por otra parte, se puede comprobar que los estados coherentes minimizan también el principio de incertidumbre para la energía y el momento.

3. La evolución de un estado  $|z_0\rangle$  está dada por

$$e^{-iT\hat{H}_0}|z_0\rangle = e^{-iT/2}|e^{-iT}z_0\rangle. \quad (6.5)$$

Esta ecuación significa que a medida que el tiempo evoluciona, el rayo unitario definido por el estado coherente  $|z_0\rangle$  en  $T = 0$  (el conjunto de vectores de la forma  $e^{i\theta}|z_0\rangle$  con  $\theta \in \mathbb{R}$ ) continúa siendo coherente en cualquier tiempo  $T$  y viene etiquetado por

$$z(T) = e^{-iT}z_0 = x_0(T) + ip_0(T),$$

donde las funciones  $x_0(T)$  y  $p_0(T)$ , dadas por la ecuación (6.1), son la posición y el momento del oscilador armónico clásico como funciones del tiempo.

4. El conjunto de los estados coherentes definen una base supercompleta y no ortogonal del espacio de Hilbert del oscilador armónico. En particular, existe una resolución espectral del tipo

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z |z\rangle\langle z| = \mathbb{I}.$$

Como se puede ver, los estados coherentes del oscilador armónico satisfacen una serie de propiedades que nos permiten considerarlos como semiclásicos en el sentido de que su evolución temporal cuántica descrita por el operador Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  sigue la evolución clásica. Tanto es así que estos estados sugieren que la mecánica clásica puede ser vista como el estudio de la mecánica cuántica para una clase restringida de vectores si interpretamos las variables clásicas como etiquetas de los mismos [167].

### 6.3. Inexistencia de estados coherentes para sistemas $f(H_0)$ generales

En esta sección estudiaremos la posibilidad de construir estados coherentes para un sistema de una partícula con un Hamiltoniano de la forma  $f(H_0)$  con  $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$ . Este

caso es especialmente interesante, ya que si tuviéramos éxito construyendo tales estados, cabría la posibilidad de extender el resultado a teorías de campos, como por ejemplo, al sistema de las ondas de Einstein-Rosen. Como veremos, esto es imposible.

Intentaremos buscar una familia de *estados coherentes*  $\mathfrak{C} = \{|z\rangle : z \in \mathbb{C}\}$  tal que la etiqueta  $z$ , que describe los datos iniciales evolucione según la dinámica clásica dictada por  $f(H_0)$ ; de forma que la familia se mantenga cerrada bajo la evolución temporal. Demostraremos que, en general, no puede existir tal familia de estados coherentes.

En términos de los datos iniciales  $z = x + ip$ , la evolución clásica del sistema se obtiene de la ecuación (6.4)

$$z(t) = z \exp(-itf'(|z|^2/2)).$$

Por tanto, requeriremos que el estado que denotaremos también en este caso como  $|z\rangle$  (en analogía con los estados coherentes usuales) evolucione de la forma:

$$\exp(-itf(\hat{H}_0))|z\rangle = \exp(i\varphi(t, z)) |z \exp(-itf'(|z|^2/2))\rangle. \quad (6.6)$$

La ecuación anterior es similar a la ecuación (6.5)<sup>3</sup>. Ahora, expandimos el estado  $|z\rangle$  en la base ortonormal dada por los autoestados de energía  $|n\rangle$  del oscilador armónico

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) |n\rangle,$$

donde asumiremos que los coeficientes  $\psi_n(z) = \psi_n(x + ip) = \psi_n(x, p)$  son funciones diferenciables. Así, de la ecuación (6.6) obtenemos:

$$\psi_n(z) = \exp[i(\varphi(t, z) + tf(E_n))] \psi_n(z \exp(-itf'(|z|^2/2))). \quad (6.7)$$

Si utilizamos la notación  $\psi_n(x, p)$  para  $\psi_n(z)$  podemos escribir la ecuación (6.7) como

$$\begin{aligned} \psi_n(x, p) &= \exp[i(\varphi(t, z) + tf(E_n))] \psi_n\left(x \cos(tf'(|z|^2/2)) \right. \\ &\quad \left. + p \sin(tf'(|z|^2/2)), p \cos(tf'(|z|^2/2)) - x \sin(tf'(|z|^2/2))\right). \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior no depende del tiempo, por lo que la derivada temporal del derecho ha de ser nula. Entonces, evaluando esta derivada en  $t = 0$  obtenemos la siguiente condición de consistencia:

$$f'(|z|^2/2) \left[ p \frac{\partial \psi_n}{\partial x}(x, p) - x \frac{\partial \psi_n}{\partial p}(x, p) \right] = -i [\dot{\varphi}_0(z) + f(E_n)] \psi_n(x, p), \quad (6.8)$$

---

<sup>3</sup>Nótese que la ecuación 6.6 es equivalente a imponer que la evolución del estado  $|z\rangle \in \mathfrak{C}$  pertenezca al rayo unitario definido por el estado  $|z(t)\rangle \in \mathfrak{C}$ . Debido a esto se ha incluido la fase arbitraria  $\exp(i\varphi(t, z))$ .

con  $\dot{\varphi}_0(z) = \frac{\partial \varphi(0,z)}{\partial t}$ . Introduciendo coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  y  $p = r \sin \theta$ , la ecuación (6.8) se escribe como

$$\frac{\partial \psi_n(r, \theta)}{\partial \theta} = i \frac{\dot{\varphi}_0(r, \theta) + f(E_n)}{f'(r^2/2)} \psi_n(r, \theta),$$

cuya solución es:

$$\psi_n(r, \theta) = c_n(r^2) \exp \left[ i \frac{f(E_n)\theta + X(\theta, r)}{f'(r^2/2)} \right], \quad (6.9)$$

donde  $X(\theta, r)$  es la primitiva

$$X(\theta, r) = \int \dot{\varphi}_0(\theta, r) d\theta,$$

y  $c_n(r^2)$  son funciones arbitrarias de  $r^2$ . Se puede comprobar fácilmente que para el oscilador armónico usual ( $f(x) = x$  y  $E_n = n + \frac{1}{2}$ ), con la elección  $\varphi(t, z) = -t/2$  se obtiene  $\psi_n = c_n(r^2) \exp(in\theta)$ . Ésta puede ser escrita como

$$\psi_n(z) = c_n(|z|^2) \exp(in \text{Arg}_n(z)),$$

donde  $\text{Arg}_n$  es una rama del argumento de  $z$ . Con esta elección,  $\exp(in \text{Arg}_n(z))$  es independiente de la rama elegida para el argumento, y podemos escribir

$$\psi_n(z) = c_n(|z|^2) \exp(in \text{Arg}(z)) = \tilde{c}_n(|z|^2) z^n,$$

con  $\text{Arg}(z) = \{\arctan(p/q) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Si comparamos este resultado con el obtenido para el oscilador armónico  $\psi_n(z) = e^{-|z|^2/2} z^n / \sqrt{n!}$  observamos que, aunque sólo parte de la dependencia en  $z$  está fijada por la ecuación (6.6), el resultado es compatible con  $\psi_n(z) = e^{-|z|^2/2} z^n / \sqrt{n!}$ . Para determinar el resto de la dependencia en  $z$  necesitamos usar las otras condiciones descritas en la sección 6.2.

A partir de la ecuación (6.9) observamos que, en general (salvo cuando  $f$  es lineal) el resultado depende de la rama elegida. Esta ambigüedad es inaceptable, por lo que se concluye que, salvo para el oscilador armónico, es imposible construir una familia de estados coherentes que satisfagan una condición equivalente a (6.6) para la evolución dada por  $f(H_0)$ .

Concretamente, para el análogo finito-dimensional de las ondas de Einstein-Rosen, tenemos que<sup>4</sup>  $f(x) = 2(1 - e^{-x/2})$ . La solución de (6.9) en este caso es

$$\psi_n(r, \theta) = c_n(r^2) \exp \left( i e^{r^2/4} [2(1 - e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})})\theta + X(\theta, r)] \right). \quad (6.10)$$

<sup>4</sup>Aquí, para facilitar la notación y dado que no necesitaremos hacer uso explícito de las constantes, fijamos de nuevo  $8G_3 = 1$ .

Por tanto, para conseguir que la solución sea aceptable necesitamos que

$$\exp \left( i e^{r^2/4} [2(1 - e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})})\theta + X(\theta, r)] \right)$$

sea independiente de la rama elegida para el argumento  $\theta$  (de otra forma, la función no sería univaluada). Sin embargo, este requisito es imposible de satisfacer porque  $X(\theta, r)$  es independiente de  $n$ . Si escribimos  $\theta = \tilde{\theta} + 2k\pi$ , dicho requisito es equivalente a la condición:

$$4k\pi e^{r^2/4}(1 - e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})}) + e^{r^2/4}X(\tilde{\theta} + 2k\pi, r) \equiv e^{r^2/4}X(\tilde{\theta}, r) \pmod{2\pi}. \quad (6.11)$$

Si consideramos (6.11) para dos números enteros diferentes  $n$  y  $m$ , la diferencia nos queda:

$$4\pi k e^{r^2/4} \left( e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})} - e^{-\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})} \right) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad (6.12)$$

que se debería cumplir para todo  $m$  y  $n$ ; lo cual es, obviamente, imposible.

Queremos señalar que este resultado no excluye la posibilidad de encontrar *estados coherentes* para sistemas  $f(H_0)$  que sólo satisfagan algunas de las condiciones que hemos considerado (en ningún caso podrían satisfacerlas todas, tal y como se ha demostrado). En todo caso, esta definición de *estados coherentes* cambiaría notablemente con respecto a la que estamos acostumbrados a ver para el oscilador armónico o para teorías libres. Por otro lado, la forma de la función  $f$  y su derivada juegan un papel esencial a la hora de definir un estado coherente aproximado. Por ejemplo, en caso de que  $f$  pueda tomarse casi-lineal (para el rango de los autovalores del Hamiltoniano libre correspondientes a los coeficientes de la expansión de un estado coherente dado) los estados coherentes usuales se comportarían de un modo semiclásico, al menos durante cierto periodo temporal [147].

## 6.4. Comparación con la dinámica libre y rangos de validez

En esta sección construiremos, primeramente, estados coherentes para una teoría de campos libre. Después abordaremos con cierto detalle la posibilidad de utilizar esos estados para estudiar la dinámica completa dada por el Hamiltoniano  $\hat{H}$ . Con este fin, estudiaremos el comportamiento asintótico de dos funciones que nos darán información cuantitativa sobre este aspecto y demostraremos que no es posible utilizar los estados coherentes de la dinámica libre como estados coherentes aproximados de la dinámica completa para periodos de tiempo arbitrariamente grandes (con independencia de la energía).

Tal y como se ha explicado en la sección 3.1, el vector  $C \in \mathcal{H}$  del espacio de Hilbert de una partícula se puede identificar –mediante la expresión (3.4)– con la solución clásica

correspondiente a los datos de Cauchy iniciales  $(Q, P)$ . Como es habitual, se puede construir una familia de estados coherentes  $\Phi_C \in \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$  parametrizada por los vectores  $C \in \mathcal{H}$  de la forma

$$\Phi_C = e^{-\|C\|^2/2} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} C^{\otimes n}. \quad (6.13)$$

Los productos escalares de los estados coherentes se pueden expresar en términos del producto escalar en el espacio de Hilbert de una partícula

$$\langle \Phi_{C_1}, \Phi_{C_2} \rangle = \exp \left( -\frac{1}{2} \|C_1 - C_2\|^2 + i \operatorname{Im} \langle C_1, C_2 \rangle \right).$$

Además, se satisface

$$|\langle \Phi_{C_1}, \Phi_{C_2} \rangle| = \exp \left( -\frac{1}{2} \|C_1 - C_2\|^2 \right) > 0, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{H}.$$

Hacemos notar que  $|\langle \Phi_{C_1}, \Phi_{C_2} \rangle|$  decrece cuando aumentamos la distancia entre los datos de Cauchy  $C_1$  y  $C_2$ .

La clase de estados coherentes es cerrada bajo la evolución libre (la debida al Hamiltoniano auxiliar)

$$\hat{U}_0(t) \Phi_C = \exp(-it\hat{H}_0) \Phi_C = \Phi_{\exp(-it\sqrt{\Theta})C} = \Phi_{C_t^0}.$$

En otras palabras, la evolución libre a un tiempo  $t$  del estado coherente asociado a los datos de Cauchy  $C$  es el estado coherente asociado con la evolución libre clásica de esos datos de Cauchy. Sin embargo, la evolución temporal completa (generada por  $\hat{H}$ ) es tal que

$$\hat{U}(t) \Phi_C = \exp(-it\hat{H}) \Phi_C \neq \Phi_{C_t} = \exp \left( -ite^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 \right) \Phi_C,$$

siendo  $H_0(C)$  el valor clásico de la energía del sistema con las condiciones iniciales definidas por  $C$  (véase sección 3.1). Además, es directo comprobar que  $\hat{U}(t) \Phi_C$  no pertenece a la familia de estados coherentes definida en (6.13).

En lo que sigue, haremos ciertas estimaciones cuantitativas que nos ayudarán a determinar cómo de útiles nos pueden resultar los estados coherentes de la dinámica libre para nuestros propósitos. En primer lugar, medimos explícitamente la distancia en el espacio de Hilbert entre el estado coherente evolucionado con la dinámica completa y el evolucionado con la libre mediante la función

$$\begin{aligned} D_C(t) &:= \|\hat{U}_0(t) \Phi_C - \hat{U}(t) \Phi_C\|^2 \\ &= 2 \langle \Phi_C, (1 - \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0))) \Phi_C \rangle \\ &= 2 - 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n} \rangle, \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0))C^{\otimes n} \rangle &= \\ &= \int_{[0,\infty)^n} \cos\left(t\left(\sum_{a=1}^n w_a - E\left(\sum_{a=1}^n w_a\right)\right)\right) |c(w_1)|^2 \cdots |c(w_n)|^2 dw_1 \cdots dw_n. \end{aligned}$$

En segundo lugar, extraeremos información sobre cómo la evolución de un estado coherente definido a partir de unos ciertos datos de Cauchy difiere del estado coherente asociado con la evolución clásica de dichos datos iniciales. Con este objetivo definimos la proyección

$$\begin{aligned} P_C(t) &:= \langle \Phi_{C_t}, \hat{U}(t)\Phi_C \rangle = \langle \Phi_C, \exp(it(e^{-H_0(C)/2}\hat{H}_0 - E(\hat{H}_0)))\Phi_C \rangle \quad (6.15) \\ &= e^{-\|C\|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2}\hat{H}_0 - E(\hat{H}_0)))C^{\otimes n} \rangle, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2}\hat{H}_0 - E(\hat{H}_0)))C^{\otimes n} \rangle &= \\ &= \int_{[0,\infty)^n} |c(\omega_1)|^2 \cdots |c(\omega_n)|^2 \exp\left(it e^{-H_0(C)/2} \sum_{a=1}^n \omega_a - it E\left(\sum_{a=1}^n \omega_a\right)\right) d\omega_1 \cdots d\omega_n. \end{aligned}$$

Nótese la presencia del factor  $e^{-H_0(C)/2}$  que, salvo para  $C = 0$  (Minkowski), marca una diferencia respecto de  $D_C$  en cuanto al comportamiento de estos objetos en función de la energía.

Ahora estudiaremos el comportamiento asintótico de estas expresiones con el fin de extraer la mayor cantidad de información física posible.

#### 6.4.1. Desarrollo asintótico para tiempos cortos

El comportamiento asintótico de las funciones (6.14,6.15) para tiempos pequeños ( $t \rightarrow 0$ ) se puede obtener fácilmente utilizando el desarrollo de Taylor de las funciones involucradas. De esta forma obtenemos que, para  $C \in \mathcal{D}(\Theta^{n/2}) \subset \mathcal{H}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} D_C(t) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k}}{(2k)!} \langle (\hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))^{2k} \rangle_{\Phi_C} + O(t^{2n+2}), \\ P_C(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \langle (e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))^k \rangle_{\Phi_C} + O(t^{n+1}). \end{aligned}$$

En concreto, obtenemos:

$$D_C(t) = \langle (E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)^2 \rangle_{\Phi_C} t^2 + O(t^4), \quad (6.16)$$

$$\operatorname{Re}(P_C(t)) = 1 - \frac{t^2}{2} \langle (e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))^2 \rangle_{\Phi_C} + O(t^4), \quad (6.17)$$

$$\operatorname{Im}(P_C(t)) = t \langle e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0) \rangle_{\Phi_C} + O(t^3). \quad (6.18)$$

Observamos que, como esperábamos,  $D_C(0) = 0$  y  $P_C(0) = 1$ . Asimismo, vemos que el comportamiento de  $D_C(t)$  y  $P_C(t)$  para tiempos cortos viene condicionado por la energía  $E(\hat{H}_0)$ . En el caso de  $D_C(t)$  la expresión (6.16) nos indica que para los estados  $\Phi_C$  tales que  $\langle (E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)^2 \rangle_{\Phi_C}$  sea suficientemente pequeño,  $D_C(t)$  se mantiene próximo a cero por más tiempo. De forma análoga (ecuaciones 6.17 y 6.18), para estados tales que  $\langle e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0) \rangle_{\Phi_C}$  sea pequeño,  $P_C(t)$  se mantendrá próximo a 1 durante un periodo mayor.

### 6.4.2. Desarrollo asintótico para tiempos grandes

El estudio del comportamiento para  $t \rightarrow \infty$  requiere un poco más de esfuerzo. En este caso, usaremos el método de la fase estacionaria para obtener el desarrollo asintótico. Para aplicar este método, conviene trabajar con sumas finitas en las expresiones. De esta forma, para cada  $N \in \mathbb{N}$  definimos las truncaciones

$$\begin{aligned} D_C(t, N) &:= 2 - 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n} \rangle, \\ P_C(t, N) &:= e^{-\|C\|^2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))) C^{\otimes n} \rangle. \end{aligned}$$

Estas funciones  $D_C(t, N)$  y  $P_C(t, N)$  constan de un número finito de sumandos y aproximan las correspondientes funciones  $D_C(t)$  y  $P_C(t)$  *uniformemente* en  $t$ , es decir, se puede demostrar que, fijado un  $C \in \mathcal{H}$  y  $\varepsilon > 0$  existe un  $N_C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que, independientemente del valor de  $t$ ,

$$\begin{aligned} |D_C(t) - D_C(t, N_C(\varepsilon))| &< 2\varepsilon, \\ |P_C(t) - P_C(t, N_C(\varepsilon))| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto viene del hecho de que es siempre posible encontrar un  $N_C(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que

$$e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C\|^{2n} < \varepsilon;$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
|D_C(t) - D_C(t, N_C(\varepsilon))| &= \left| 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n} \rangle \right| \\
&\leq 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n} \rangle \right| \\
&\leq 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C^{\otimes n}\| \cdot \|\cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n}\| \\
&\leq 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C^{\otimes n}\|^2 \\
&= 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C\|^{2n} < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
|P_C(t) - P_C(t, N_C(\varepsilon))| &= \left| e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))) C^{\otimes n} \rangle \right| \\
&\leq e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))) C^{\otimes n} \rangle \right| \\
&\leq e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C^{\otimes n}\| \cdot \|C^{\otimes n}\| \\
&= e^{-\|C\|^2} \sum_{n=N_C(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n!} \|C\|^{2n} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Este resultado, justifica trabajar con las aproximaciones  $D_C(t, N)$  y  $P_C(t, N)$ .

Ahora, demostraremos que, dada

$$C(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty c(\omega) J_0(\omega r) d\omega \in \mathcal{H}$$

continua, las aproximaciones  $D_C(t, N)$  satisfacen

$$D_C(t, N) \sim 2 - 2e^{-\|C\|^2} - B_c e^{-\|C\|^2} \Gamma\left(\frac{\beta_c + 1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}(\beta_c + 1)\right) \left(\frac{4}{t}\right)^{\frac{\beta_c + 1}{2}} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (6.19)$$

con  $\beta_c \geq 2$  y dependiente del estado  $C(r)$  que elijamos, y  $B_c \in \mathbb{R}$  y distinto de cero. Por tanto,  $D_C(t, N)$  se aproxima a  $2 - 2e^{-\|C\|^2}$  al menos como  $(1/t)^{3/2}$ .



Este resultado se sigue de que

$$D_C(t, N) = 2 - 2e^{-\|C\|^2} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} A_n^C, \quad (6.20)$$

donde  $A_0^C := 1$  y, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} A_n^C &:= \langle C^{\otimes n}, \cos(t(E(\hat{H}_0) - \hat{H}_0)) C^{\otimes n} \rangle = \\ &= \int_{[0, \infty)^n} \cos\left(t\left(\sum_{a=1}^n \omega_a - E\left(\sum_{a=1}^n \omega_a\right)\right)\right) |c(\omega_1)|^2 \cdots |c(\omega_n)|^2 d\omega_1 \cdots d\omega_n \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(it(z - E(z))) G_n(z, C) dz + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-it(z - E(z))) G_n(z, C) dz. \end{aligned}$$

En la última integral se ha hecho el cambio de variables

$$z = \sum_{a=1}^n \omega_a, \quad \omega_1 = \omega_1, \quad \dots, \quad \omega_{n-1} = \omega_{n-1}$$

y se han definido las funciones  $G_n(z, C)$  de la forma:

$$G_n(z, C) := \int_{\prod_{k=1}^{n-1} [0, z - \sum_{a=1}^{k-1} \omega_a]} |c(z - \sum_{a=1}^{n-1} \omega_a)|^2 \prod_{k=1}^{n-1} |c(\omega_k)|^2 d\omega_1 \cdots d\omega_{n-1}.$$

Éstas satisfacen:

$$G_n(z, C) \sim B_c^n z^{n(\beta_c+1)-1} \quad (z \rightarrow 0),$$

siendo  $B_c$  y  $\beta_c$  constantes para cada estado considerado y  $\beta_c \geq 2$ . Utilizando el método de la fase estacionaria, obtenemos que el desarrollo asintótico de  $A_n^C$  para tiempos grandes es:

$$A_n^C(t) \sim \Gamma\left(\frac{n(\beta_c+1)}{2}\right) \frac{B_c^n}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(n(\beta_c+1))\right) \left(\frac{4}{t}\right)^{\frac{n(\beta_c+1)}{2}}.$$

Por tanto, la contribución principal al desarrollo asintótico de  $D_C(t, N)$  vendrá dada por  $2 - 2e^{-\|C\|^2}(1 + A_1^C)$ . De esta forma, llegamos a la expresión (6.19).

Para la función  $P_C(t, N)$  tenemos que, si  $C \in \mathcal{H}$  es continua, las aproximaciones  $P_C(t, N)$  satisfacen

$$P_C(t, N) = e^{-\|C\|^2} + \frac{\exp(it\varrho(C))}{\sqrt{t}} F(C, N) + O(1/t) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (6.21)$$

donde

$$\varrho(C) := (H_0(C) + 2)e^{-H_0(C)/2} - 2$$

y  $F(C, N)$  es un cierto factor que únicamente depende de  $C$  y de  $N \in \mathbb{N}$ . Este último resultado es consecuencia de aplicar el método de la fase estacionaria a la expresión:

$$\begin{aligned} \langle C^{\otimes n}, \exp(it(e^{-H_0(C)/2} \hat{H}_0 - E(\hat{H}_0))) C^{\otimes n} \rangle &= \int_0^\infty \exp\left(it(e^{-H_0(C)/2} z - E(z))\right) G_n(z, C) dz \\ &= \sqrt{4\pi} e^{H_0(C)/4} G_n(H_0(C), C) \frac{\exp(it\varrho(C) + \frac{i\pi}{4})}{\sqrt{t}} + O(t^{-1}). \end{aligned}$$

Concluimos entonces que los desarrollos asintóticos para tiempos grandes de  $D_C(t)$  y  $P_C(t)$  vienen descritos por el comportamiento marcado en (6.19) y en (6.21).

La principal información que obtenemos de este estudio es que, para periodos de tiempo suficientemente cortos (determinados por el Hamiltoniano  $H_0$ ), los estados coherentes de la dinámica libre pueden considerarse, de hecho, semiclásicos. En el límite de tiempos largos recuperamos *desde un punto de vista dinámico* los resultados obtenidos por A. Ash-tekhar [147] sobre la existencia de efectos cuánticos grandes en este sistema. En concreto, observamos que los estados coherentes libres  $\Phi_C$  con  $\|C\| \sim 1$  no son semiclásicos y, además, se comportan cada vez peor para valores mayores de  $\|C\|$ . Hemos discutido esto mediante el estudio de la distancia y de las proyecciones de ciertos estados obtenidos considerando las diferentes evoluciones temporales relevantes para el modelo (la auxiliar dada por  $H_0$  y la completa). En particular, si consideramos la distancia (al cuadrado), como función del tiempo, entre los estados obtenidos evolucionando estados coherentes con la evolución libre y con la completa, vemos que se aproxima al valor  $2 - 2e^{-\|C\|^2}$ . Si  $\|C\|$  es muy pequeño la distancia permanece pequeña, mientras que se hace significativa tan pronto como  $\|C\| \sim 1$ . Finalmente, para valores mayores de  $\|C\|$  la distancia se aproxima a su máximo valor. Llegamos a conclusiones similares al estudiar las correspondientes proyecciones  $P_C(t)$ .

Queremos remarcar que aquí no se ha probado la imposibilidad de encontrar estados semiclásicos para el modelo. El resultado que hemos presentado nos indica que no todos los estados semiclásicos de la dinámica libre auxiliar pueden ser considerados como tales para la dinámica completa. De hecho, un problema abierto interesante es encontrar una clase suficientemente grande de estados semiclásicos que representen soluciones correspondientes a las ondas de Einstein-Rosen para valores grandes de  $\|C\|$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

A lo largo de esta tesis se ha estudiado detalladamente la cuantización de las reducciones de simetría para relatividad general en espacio-tiempos  $(g_{ab}^{(4)}, \mathbb{R}^4)$  cilíndricamente simétricos cuyo contenido de materia se corresponde al de una familia de campos escalares sin masa. Estos sistemas generalizan los modelos denominados *ondas de Einstein-Rosen* [127]. Éstos son espacio-tiempos  $\mathbb{R}^4$  en vacío que poseen dos campos de vectores de Killing espaciales (uno traslacional a lo largo del eje de simetría y otro azimutal), conmutantes entre si y ortogonales a hipersuperficies (polarización lineal). Ahora, detallaremos los principales puntos de interés y las conclusiones más relevantes del trabajo realizado.

- A pesar de los múltiples avances que han acaecido en el campo de la gravedad cuántica, seguimos sin disponer de una descripción completa y consistente, a una escala cuántica, de la fuerza gravitatoria. En este punto, es importante hacer notar que dos de las características principales de la relatividad general (invariancia bajo difeomorfismos y grados de libertad locales) parecen ser la causa de la no renormalizabilidad perturbativa de la teoría.
- Para ganar intuición sobre los problemas que surgen y sobre los efectos de la cuantización de un sistema gravitatorio, resulta de gran utilidad estudiar modelos exactamente resolubles (imponiendo ciertas simetrías) que conserven las características principales de la relatividad general pero que eviten algunas de las dificultades encontradas en el proceso de cuantización.
- El modelo reducido de las ondas de Einstein-Rosen (en vacío) posee grados de libertad locales y cierta invariancia bajo difeomorfismos (en la dirección radial). Es posible llevar a cabo el formalismo Hamiltoniano y resolver las ecuaciones del movimiento de este sistema. Además se puede llevar a cabo una cuantización de Fock del mismo

y obtener exactamente tanto el Hamiltoniano cuántico como el operador unitario de evolución.

- En esta tesis hemos enriquecido el modelo de Einstein-Rosen acoplándole, en su descripción 3+1 dimensional, una familia de campos escalares sin masa con simetría cilíndrica. En este caso, disponemos de campos de materia externos cuyos cuantos podemos utilizar a modo de partículas de prueba para explorar la geometría cuántica, de forma análoga a lo que acontece en el caso clásico, donde las trayectorias de las partículas de prueba (objetos puntuales con masa despreciable) nos señalan las geodésicas de la métrica del espacio-tiempo.
- Utilizando las técnicas de reducción de Geroch, y tras efectuar una transformación conforme de la métrica, llegamos a una descripción equivalente del sistema en 2+1 dimensiones. Si observamos la expresión para la acción 2+1 dimensional, vemos que es la acción de Einstein-Hilbert con términos adicionales correspondientes a campos escalares sin masa. Uno de ellos, denominado *escalar gravitatorio*, es de origen geométrico y describe los grados de libertad de la métrica original en 4 dimensiones. Los demás corresponden a la familia de campos escalares acoplados en 3+1 dimensiones. El papel simétrico que juegan *todos* estos campos en la formulación 2+1 dimensional facilitará, y en último caso hará posible, la resolución del sistema. En este proceso, nos restringiremos únicamente a las soluciones que sean *asintóticamente planas* en el sentido 2+1 dimensional, en el que se permite que exista un defecto angular en la región asintótica.
- El Hamiltoniano del sistema resulta ser una función no lineal y acotada del Hamiltoniano libre que describe un conjunto de campos escalares sin masa, desacoplados, con simetría axial, que se propagan en un espacio-tiempo minkowskiano 2+1 dimensional. Esta forma especial del Hamiltoniano es una prueba más de que los campos están en interacción. Las ecuaciones del movimiento que se derivan del mismo están acopladas y aparentan ser difícilmente tratables; sin embargo, un cambio *exótico* de variable temporal (distinto para cada familia de datos de Cauchy) las desacopla y las convierte en ecuaciones de onda usuales (ecuaciones de Klein-Gordon con simetría axial).
- Para llevar a cabo la cuantización, se toma como espacio de Hilbert el espacio de Fock construido como el producto tensorial de los espacios de Fock habituales para cada uno de los campos escalares sin masa libres, con simetría axial, en 2+1 dimensiones. Así, nuestro espacio de Fock tiene un *sector gravitatorio*, dado por el espacio de Fock

del campo escalar de origen geométrico, y un sector de materia (dado por los campos escalares acoplados).

- Haciendo uso de los operadores de creación y aniquilación de cada uno de los espacios de Fock, se construyen los operadores campo y momento y, con ellos, tras aplicar orden normal, el operador Hamiltoniano. Éste es un operador autoadjunto (representa la energía del sistema) y, al igual que su homólogo clásico, es una función acotada y no lineal de un Hamiltoniano libre. El estado de vacío del sistema (el de mínima energía) coincide con el vacío de Fock y viene dado por el producto tensorial de los vacíos de cada sector.
- La construcción del operador unitario de evolución es directa puesto que el Hamiltoniano no depende del tiempo. Se observa que no hay creación ni destrucción de partículas bajo la evolución y que el número de cuantos de cada sector permanece constante. Es reseñable que, a pesar de estar tratando con un sistema en interacción, se puede construir de forma exacta el operador unitario de evolución. Nótese que el operador unitario de evolución define también la matriz  $S$ .
- Como consecuencia de todo el proceso de reducción de simetría y cuantización, se observa la aparición de una longitud característica del sistema que juega el papel de la longitud de Planck. Esta distancia característica nos permitirá diferenciar las escalas en las que estemos tratando con fenómenos gravito-cuánticos de aquellas en las que nos aproximemos a un *límite clásico*.
- Una vez dada la descripción cuántica completa de este sistema, es interesante obtener información geométrica del mismo. Para ello, construimos objetos que tengan interpretación directa en términos espacio-temporales. El más sencillo de tales objetos es la función de dos puntos de los campos escalares (que admite una interpretación aproximada como amplitud de probabilidad).
- Con el propósito de estudiar expresiones que sean auténticas amplitudes de probabilidad en el espacio de posiciones debemos construir una base generalizada de estados localizados. Obtenemos estos estados para nuestro sistema de forma análoga a la seguida para construir los de estados de Newton-Wigner en Teoría Cuántica de Campos usual. Sin embargo, los problemas que exhiben los estados de Newton-Wigner originales, relacionados con el hecho de que no forman una familia cerrada bajo las transformaciones de Lorentz, se ven parcialmente aliviados en nuestro caso (al tratar con un grupo de simetría “más pequeño”). De esta forma, estudiamos la evolución del propagador construido con nuestros *estados de Newton-Wigner* así como la evolución

de la función de onda obtenida utilizando una base formada por estos estados. El cuadrado del módulo de la función de onda es, ahora sí, una densidad de probabilidad que nos marca la probabilidad de encontrar los cuantos en una cierta región del espacio-tiempo bidimensional.

- Haciendo un estudio asintótico de los objetos estudiados en la tesis (función de dos puntos, propagador de Newton-Wigner y función de onda) es posible obtener su comportamiento en los diferentes regímenes físicos. En concreto, podemos estudiar con detalle el comportamiento a escalas de distancia y tiempo muy superiores a las que define la longitud característica, es decir, en el límite clásico. Por otro lado, con objeto de discernir los efectos propios de la cuantización del campo gravitatorio de aquellos característicos de la simetría del problema, comparamos los resultados obtenidos para las ondas de Einstein-Rosen con los correspondientes a un campo escalar sin masa con simetría axial en Minkowski. Se observan tres efectos que son de especial interés (y que no ocurren en el caso libre).
  - Todos los objetos estudiados nos dicen que la probabilidad de encontrar los cuantos del campo cerca del eje de simetría es alta. En nuestra opinión, la comparación con el caso libre (que presenta la misma simetría y en el que no se produce este efecto) sugiere que se trata de un fenómeno que se debe a la combinación de efectos cuánticos y gravitatorios.
  - En el estudio de la evolución de la función de onda se observa claramente que, cuando nos acercamos al límite clásico, la probabilidad de encontrar los cuantos del campo escalar se concentra a lo largo de trayectorias que pueden ser interpretadas (de forma directa) como geodésicas nulas —estamos tratando con campos sin masa— de una métrica minkowskiana que emerge a grandes escalas<sup>1</sup>. También se ha visto este efecto en los otros objetos estudiados, en particular, con la función de dos puntos y el propagador de Newton-Wigner.
  - Se observa la persistencia de una gran amplitud de probabilidad en la región donde se encontraba el soporte de la función de onda inicial. Este efecto se manifiesta, tanto en la función de dos puntos como en el propagador, como

---

<sup>1</sup>Esta métrica ha de ser, efectivamente, la de Minkowski debido a que los cálculos se realizan utilizando el vacío del sector gravitatorio que, en este límite, corresponde a Minkowski. Sin embargo, hemos de tener cuidado con este tipo de correspondencias debido a la relación existente entre el sector gravitatorio y el de materia. En realidad, el estado que corresponde a la métrica minkowskiana es el vacío de la teoría, definido como el producto tensorial del vacío del sector gravitatorio por el vacío del sector de materia. Los estados de una partícula que consideramos en nuestros cálculos son los que más se aproximan al vacío (sin ser el vacío mismo).

una divergencia en el soporte inicial. Podemos interpretar este efecto como un fenómeno de autogravedad (que se opone a la dispersión del paquete de ondas inicial).

- Para obtener información espacio-temporal en 3+1 dimensiones se podría pensar en usar los cuantos de los campos de materia para explorar las geometrías cuantizadas correspondientes a estados que representen configuraciones clásicas relacionadas con soluciones arbitrarias de las ondas de Einstein-Rosen. En particular, en ese caso, podríamos comparar los resultados obtenidos a partir de dichos estados con aquellos otros obtenidos cuantizando los campos de materia en los espacio-tiempos curvos descritos por esas soluciones. Esto requiere encontrar previamente estados semiclásicos no triviales para este sistema y, posteriormente, estudiar su evolución.
- En principio, cabría pensar que para la clase de sistemas descritos por un Hamiltoniano que es una función de uno libre (como es el caso de las ondas de Einstein-Rosen) no debería de resultar difícil construir estados que tengan las mismas buenas propiedades que los estados coherentes de los campos libres. Sin embargo, se demuestra que en general, y en concreto para nuestro sistema, es imposible construir tales estados.
- Ante la imposibilidad de disponer de auténticos estados coherentes, resulta útil estudiar en qué medida se pueden utilizar los estados coherentes de la teoría libre como estados aproximadamente coherentes bajo la dinámica completa. Los resultados en este sentido no son muy optimistas: se observa que los estados coherentes  $\Phi_C$ , con  $\|C\|$  del orden de la unidad (o mayor), no pueden considerarse semiclásicos bajo la dinámica de las ondas de Einstein-Rosen.

El problema de la cuantización de modelos con reducción de simetría de relatividad general no está en absoluto agotado, y ofrece la posibilidad de seguir estudiando nuevos aspectos sobre gravedad cuántica. En concreto, en el contexto de las ondas de Einstein-Rosen, es interesante tratar de estudiar (aunque se prevé que sea sustancialmente más complicado) el caso con constante cosmológica o el acoplo de otro tipo de campos, como el campo escalar masivo, el campo electromagnético... Otro aspecto que tiene un gran interés es continuar buscando estados que se comporten (de una forma aproximada) como estados semiclásicos bajo la dinámica que describe la evolución del sistema y utilizarlos para calcular, en este caso, los diferentes objetos aquí estudiados. Además, se puede intentar construir un operador métrica y estudiar el valor esperado y la dispersión del mismo para estos estados semiclásicos.

Como conclusión me gustaría subrayar que, en nuestra opinión, las ondas de Einstein-Rosen, bien sea en vacío o con campos escalares acoplados, son un extraordinario campo

de pruebas para estudiar la gravedad (geometría) cuántica. Por supuesto, siempre hemos de tener presente que es difícil determinar hasta qué punto los resultados obtenidos son equivalentes a efectos reales de una teoría completa de la gravedad cuántica o si, por el contrario, provienen en mayor medida de la reducción de simetría. A este respecto, opinamos que los efectos descritos en esta tesis admiten una interpretación razonable y sensata; y constituyen una herramienta muy útil para entender el comportamiento de la gravedad a una escala cuántica.



# Apéndice A

## Funciones de $n$ -puntos

Como ya se ha comentado en el capítulo 4, las funciones de  $n$ -puntos juegan un papel fundamental en el análisis perturbativo estándar de la Teoría Cuántica de Campos, siendo fundamentales para la obtención de la matriz  $S$  y para discutir aspectos tan importantes como la renormalizabilidad de la teoría. Como veremos, el comportamiento de las mismas para el caso de las ondas de Einstein-Rosen difiere del que encontramos en las teorías cuánticas de campos usuales. Interpretamos este hecho como una manifestación más de que la aproximación correcta a los objetos físicos de interés en este modelo no viene dada por un desarrollo en serie de potencias en la correspondiente constante de acoplo sino por un comportamiento asintótico mucho más complicado.

Con la idea de comparar los resultados referentes a las funciones de  $n$ -puntos con los obtenidos en el cuerpo de la tesis utilizaremos la notación introducida en la sección 3.1 y la utilizada por M. Reed y B. Simon en [170] con unos convenios ligeramente modificados. Introducimos primeramente en el espacio de Fock  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger(C)$  y aniquilación  $\hat{a}(\bar{C})$ , que están etiquetados mediante vectores del espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}$  y satisfacen las reglas de conmutación usuales

$$[\hat{a}(\bar{C}_1), \hat{a}^\dagger(C_2)] = \langle C_1, C_2 \rangle \mathbb{I}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{H}.$$

Por otra parte, la conjugación  $\bar{\phantom{x}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  permite definir vectores reales e imaginarios puros

$$\mathcal{H}_R := \{C \in \mathcal{H} \mid \bar{C} = C\}, \quad \mathcal{H}_I := \{C \in \mathcal{H} \mid \bar{C} = -C\}$$

que, claramente, están relacionados por la igualdad  $\mathcal{H}_I = i\mathcal{H}_R$ . Ahora, dado  $f \in \mathcal{H}_R$ ,

definimos los operadores campo y momento mediante

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(f) &:= \left( \hat{a}(\bar{f}) + \hat{a}^\dagger(f) \right) = \left( \hat{a}(f) + \hat{a}^\dagger(f) \right) \\ \hat{p}(f) &:= \left( \hat{a}(\bar{if}) + \hat{a}^\dagger(if) \right) = -i \left( \hat{a}(f) - \hat{a}^\dagger(f) \right),\end{aligned}$$

que satisfacen las reglas de conmutación

$$[\hat{\phi}(f_1), \hat{p}(f_2)] = 2i \langle f_1, f_2 \rangle \mathbb{I}.$$

Dado que los datos de Cauchy pueden ser identificados con los elementos de  $\mathcal{H}$  mediante

$$C = \kappa(Q, P) = \frac{1}{2} \left( Q + i\Theta^{-\frac{1}{2}}P \right),$$

podemos escribir conjuntamente los operadores campo y momento mediante un único operador<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\hat{\Upsilon}(C) &:= \hat{a}(\bar{C}) + \hat{a}^\dagger(C) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{a}(Q) + \hat{a}(\overline{i\Theta^{-\frac{1}{2}}P}) + \hat{a}^\dagger(Q) + \hat{a}^\dagger(i\Theta^{-\frac{1}{2}}P) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{\phi}(Q) + \hat{p}(\Theta^{-\frac{1}{2}}P) \right).\end{aligned}$$

El carácter conjugado de los operadores de campo y momento queda reflejado en las reglas de conmutación

$$[\hat{\Upsilon}(C_1), \hat{\Upsilon}(C_2)] = -i\omega(C_1, C_2)\mathbb{I}.$$

Consideraremos a continuación la evolución de los operadores  $\Upsilon(C)$  en la imagen de Heisenberg desde el instante inicial  $t = 0$  a un instante genérico  $t$ .

## A.1. Funciones de $n$ -puntos para el caso libre

En primer lugar trataremos el caso de la evolución libre. En este caso es inmediato comprobar que

$$\hat{\Upsilon}^0(t, C) := \hat{U}_0^{-1}(t) \hat{\Upsilon}(C) \hat{U}_0(t) = \exp(it\hat{H}_0) \hat{\Upsilon}(C) \exp(-it\hat{H}_0) = \hat{\Upsilon}(C_t^0),$$

donde  $C_t^0 = \exp(-it\sqrt{\Theta})C$  es la evolución clásica libre del dato de Cauchy definido por  $C$ . Esta simplificación hace que las funciones de  $n$ -puntos  $F_n^0$  del modelo auxiliar libre,

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante omitiremos la aplicación  $\kappa$  para no sobrecargar la notación.

definidas como los valores esperados en el vacío de Fock  $\Phi_0 = 1 \oplus 0 \oplus \dots$  tengan una expresión especialmente simple

$$\begin{aligned} F_n^0(t_1, C_1; t_2, C_2; \dots; t_n, C_n) &= \langle \hat{\Upsilon}^0(t_1, C_1) \hat{\Upsilon}^0(t_2, C_2) \dots \hat{\Upsilon}^0(t_n, C_n) \rangle_{\Phi_0} \\ &= \langle \hat{\Upsilon}(C_{1t_1}^0) \hat{\Upsilon}(C_{2t_2}^0) \dots \hat{\Upsilon}(C_{nt_n}^0) \rangle_{\Phi_0}. \end{aligned}$$

En concreto, es bien conocido que

$$F_{2n+1}^0(t_1, C_1; t_2, C_2; \dots; t_{2n+1}, C_{2n+1}) = 0;$$

y las funciones  $F_{2n}^0(t_1, C_1; t_2, C_2; \dots; t_{2n}, C_{2n})$  se obtienen mediante productos y sumas de las funciones libres de dos puntos  $F_2^0(t_i, C_i; t_j, C_j)$ . Por ejemplo

$$\begin{aligned} F_4^0(t_1, C_1; t_2, C_2, t_3, C_3; t_4, C_4) &= F_2^0(t_1, C_1; t_3, C_3) F_2^0(t_2, C_2; t_4, C_4) \\ &\quad + F_2^0(t_1, C_1; t_4, C_4) F_2^0(t_2, C_2; t_3, C_3) \\ &\quad + F_2^0(t_1, C_1; t_2, C_2) F_2^0(t_3, C_3; t_4, C_4). \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

## A.2. Funciones de $n$ -puntos para la dinámica completa

Consideraremos ahora la dinámica completa. En este caso, la evolución de los operadores  $\hat{\Upsilon}(C)$  viene dada a través de

$$\hat{\Upsilon}(t, C) := \hat{U}^{-1}(t) \hat{\Upsilon}(C) \hat{U}(t) = \exp(it\hat{H}) \hat{\Upsilon}(C) \exp(-it\hat{H}).$$

Debido a que la evolución es unitaria, el carácter conjugado de los operadores se sigue manteniendo independientemente del valor de  $t$

$$[\hat{\Upsilon}(t, C_1), \hat{\Upsilon}(t, C_2)] = -i\omega(C_1, C_2)\mathbb{I}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, al contrario de lo que ocurre para la evolución libre, es evidente que

$$\hat{\Upsilon}(t, C) \neq \hat{\Upsilon}(C_t) = \hat{\Upsilon}\left(\exp(-ite^{-H_0(C)/2}\sqrt{\Theta})C\right)$$

ya que la dinámica clásica completa

$$C_t = \exp(-ite^{-H_0(C)/2}\sqrt{\Theta})C$$

no depende linealmente del dato inicial  $C$ . En concreto, no es posible asociar ninguna relación de tipo Bogoliubov con la acción de los operadores unitarios  $\hat{U}(t)$ . Es decir, no es posible encontrar ninguna relación de la forma [37]

$$\hat{U}^{-1}(t) \hat{a}(\overline{C}) \hat{U}(t) = \hat{a}(\overline{A_t C}) - \hat{a}^\dagger(\overline{B_t C})$$

para ningún par de operadores  $A_t$  y  $B_t$  definidos sobre el espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}$ . Además, pese a lo que se podría esperar intuitivamente<sup>2</sup>,

$$\hat{U}^{-1}(t)\hat{a}(\bar{C})\hat{U}(t) \neq \overline{\hat{a}(\exp(itE(\sqrt{\Theta}))C)}.$$

El comportamiento real (físico) viene descrito por las relaciones

$$\begin{aligned}\hat{a}(t, \bar{C}) &:= \hat{U}^{-1}(t)\hat{a}(\bar{C})\hat{U}(t) = \exp(-ite^{-\hat{H}_0/2} \otimes E(\sqrt{\Theta})^{\text{der}})\hat{a}(\bar{C}), \\ \hat{a}^\dagger(t, C) &:= \hat{U}^{-1}(t)\hat{a}^\dagger(C)\hat{U}(t) = \hat{a}^\dagger(C) \exp(ite^{-\hat{H}_0/2} \otimes E(\sqrt{\Theta})^{\text{izq}}),\end{aligned}$$

–obtenidos fácilmente a partir de las expresiones (3.14,3.15)– donde se muestra el fenómeno (que denominaremos de *entrelazamiento*) que se produce entre el estado  $C \in \mathcal{H}$  (que etiqueta a los operadores de aniquilación y creación) y los vectores del espacio de Fock sobre los que actúa  $\hat{U}^{-1}(t)\hat{a}(\bar{C})\hat{U}(t)$ . La notación utilizada intenta reflejar este *entrelazamiento*: dado un estado de  $n$  partículas  $V \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ , con coeficientes de Fourier  $v(w_1, \dots, w_n)$ , el vector

$$\exp(-ite^{-\hat{H}_0/2} \otimes E(\sqrt{\Theta})^{\text{der}})\hat{a}(\bar{C}) \cdot V \in \mathcal{H}^{\otimes (n-1)}$$

tiene coeficientes de Fourier

$$\sqrt{n} \int_0^\infty \exp\left(-ite^{-(w_1+\dots+w_{n-1})/2} E(w)\right) \overline{c(w)} v(w, w_1, \dots, w_{n-1}) dw.$$

Dicho *entrelazamiento* (fruto de la interacción) hace que el cálculo de las funciones de  $n$ -puntos definidas por

$$F_n(t_1, C_1; t_2, C_2; \dots; t_n, C_n) := \langle \Phi_0 | \hat{\Upsilon}(t_1, C_1) \hat{\Upsilon}(t_2, C_2) \dots \hat{\Upsilon}(t_n, C_n) \Phi_0 \rangle$$

sea complicado (salvo para  $n = 2$ ) y muy distinto del caso libre. Estudiaremos ahora este fenómeno para los casos más sencillos de las funciones de 2 y de 4 puntos.

La función de dos puntos puede calcularse fácilmente

$$\begin{aligned}F_2(t_1, C_1; t_2, C_2) &= \langle \Phi_0 | \hat{a}(t_1, \bar{C}_1) \hat{a}^\dagger(t_2, C_2) \Phi_0 \rangle = \langle \hat{a}^\dagger(t_1, C_1) \Phi_0 | \hat{a}^\dagger(t_2, C_2) \Phi_0 \rangle \\ &= \langle \exp(it_1 E(\sqrt{\Theta})) C_1 | \exp(it_2 E(\sqrt{\Theta})) C_2 \rangle \\ &= \int_0^\infty \exp(i(t_2 - t_1) E(w)) \overline{c_1(w)} c_2(w) dw.\end{aligned}$$

Nótese que esta expresión es análoga a la obtenida en la ecuación (4.2). De igual forma, la función de cuatro puntos admite un cálculo directo

$$\begin{aligned}F_4(t_1, C_1; t_2, C_2; t_3, C_3; t_4, C_4) &= \langle \hat{a}^\dagger(t_2, C_2) \hat{a}^\dagger(t_1, C_1) \Phi_0 | \hat{a}^\dagger(t_3, C_3) \hat{a}^\dagger(t_4, C_4) \Phi_0 \rangle \\ &\quad + F_2(t_1, C_1; t_2, C_2) F_2(t_3, C_3; t_4, C_4)\end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Recuérdese que  $E(x) = 2(1 - \exp(-H_0/2))$ .

pero, al contrario de lo que ocurre para la función de cuatro puntos libre (A.1.1),  $F_4$  no puede ser escrita como suma de productos de funciones de dos puntos. La causa de este comportamiento se encuentra en el término de *entrelazamiento*

$$\langle \hat{a}^\dagger(t_2, C_2) \hat{a}^\dagger(t_1, C_1) \Phi_0 | \hat{a}^\dagger(t_3, C_3) \hat{a}^\dagger(t_4, C_4) \Phi_0 \rangle ,$$

que no puede ser escrito como producto de funciones de dos puntos:

$$\begin{aligned} & \langle \hat{a}^\dagger(t_2, C_2) \hat{a}^\dagger(t_1, C_1) \Phi_0 | \hat{a}^\dagger(t_3, C_3) \hat{a}^\dagger(t_4, C_4) \Phi_0 \rangle = \\ & = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \overline{c_2(w_2)} c_4(w_2) \exp \left( i(t_4 - t_2 e^{-w_1/2}) E(w_2) + i t_3 e^{-w_2/2} E(w_1) \right) dw_2 \right) \times \\ & \quad \times \overline{c_1(w_1)} c_3(w_1) \exp \left( - i t_1 E(w_1) \right) dw_1 + \\ & + \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \overline{c_2(w_2)} c_3(w_2) \exp \left( i(t_3 - t_2) e^{-w_1/2} E(w_2) \right) dw_2 \right) \times \\ & \quad \times \overline{c_1(w_1)} c_4(w_1) \exp \left( i(t_4 - t_1) E(w_1) \right) dw_1 . \end{aligned}$$

En general, se puede comprobar que  $F_{2n+1} = 0$ , mientras que las funciones de  $2n$  puntos

$$\begin{aligned} & F_{2n}(t_1, C_1; \dots; t_{2n}, C_{2n}) \\ & = \langle \Phi_0 | \hat{a}(t_1, \overline{C_1}) (\hat{a}(t_2, \overline{C_2}) + \hat{a}^\dagger(t_2, C_2)) \cdots (\hat{a}(t_{2n-1}, \overline{C_{2n-1}}) + \hat{a}^\dagger(t_{2n-1}, C_{2n-1})) \hat{a}^\dagger(t_{2n}, C_{2n}) \Phi_0 \rangle \end{aligned}$$

siempre tienen un término cuyo *entrelazamiento* es superior al del caso anterior presente en  $F_{2n-2}$ . En concreto, hay dos contribuciones extremas en cuanto al *entrelazamiento* se refiere. Por un lado, tenemos términos de la forma<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_0 | \prod_{k=1}^{2n} \hat{a}(t_{2k-1}, \overline{C_{2k-1}}) \hat{a}^\dagger(t_{2k}, C_{2k}) \Phi_0 \rangle \\ & = \langle \prod_{k=1}^n \hat{a}(t_{2k-1}, \overline{C_{2k-1}}) \hat{a}^\dagger(t_{2k}, C_{2k}) \Phi_0 | \prod_{s=n+1}^{2n} \hat{a}(t_{2s-1}, \overline{C_{2s-1}}) \hat{a}^\dagger(t_{2s}, C_{2s}) \Phi_0 \rangle \\ & = \prod_{k=1}^n F_2(t_{2k-1}, C_{2k-1}; t_{2k}, C_{2k}) , \end{aligned}$$

que pueden descomponerse como producto de  $n$  funciones de dos puntos. Mientras que, por otra parte, los términos de la forma

$$\langle \Phi_0 | \prod_{k=1}^n \hat{a}(t_k, \overline{C_k}) \prod_{s=n+1}^{2n} \hat{a}^\dagger(t_s, C_s) \Phi_0 \rangle = \langle \prod_{k=1}^n \hat{a}^\dagger(t_k, C_k) \Phi_0 | \prod_{s=n+1}^{2n} \hat{a}^\dagger(t_s, C_s) \Phi_0 \rangle$$

presentan un grado de *entrelazamiento* máximo; de hecho, superior al máximo entrelazamiento presente en el caso  $2(n-1)$ .

<sup>3</sup>Con el fin de simplificar las expresiones, utilizaremos la siguiente notación para el producto de operadores:  $\prod_{k=1}^n \hat{A}_k := \hat{A}_1 \hat{A}_2 \cdots \hat{A}_n$ .



# Apéndice B

## Microcausalidad

Una aplicación de los resultados anteriores para la función de dos puntos es el estudio de la microcausalidad del sistema, ya tratada en 2004 por J. F. Barbero, G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor [148]. Puesto que estamos tratando con un sistema en interacción, el conmutador de los campos no es un c-número sino un operador, por lo que para estudiar la microcausalidad deberíamos, en principio, calcular todos los elementos de matriz del mismo.

Para obtener una primera idea sobre los efectos de la cuantización de un sistema gravitatorio en la estructura causal del espacio-tiempo asintótico, trataremos aquí los elementos de matriz vacío-vacío del conmutador de los campos. Calcularemos este elemento de matriz y estudiaremos el límite en el que las longitudes consideradas son mucho mayores que la escala característica  $4G$ .

El elemento de matriz que vamos a considerar es  $\langle \Omega | [\hat{\phi}_I(R_2, t_2), \hat{\phi}_I(R_1, t_1)] | \Omega \rangle$ . A partir de la expresión para la función de dos puntos (4.3), éste toma la forma

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) [\exp[-i\tau(1 - e^{-q})] - \exp[i\tau(1 - e^{-q})]] dq \\ &= -2i \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \sin[\tau(1 - e^{-q})] dq, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las variables adimensionales  $\rho_1 = \frac{R_1}{4G}$ ,  $\rho_2 = \frac{R_2}{4G}$ , y  $\tau = \frac{t_2 - t_1}{4G}$  introducidas en la sección 4.2. Por tanto, tenemos que

$$\langle \Omega | [\hat{\phi}_I(R_2, t_2), \hat{\phi}_I(R_1, t_1)] | \Omega \rangle = 2i\Im \int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq. \quad (\text{B.0.1})$$

El conmutador para los campos es independiente del índice  $I$  que los etiqueta, es decir, todos ellos dan la misma información sobre la microcausalidad, lo cual es una prueba de

consistencia interesante. Esto es debido, de nuevo, al papel simétrico que juegan estos campos en el Hamiltoniano y en el operador de evolución (ver sección 3.2).

Observamos en la expresión (B.0.1) que el valor esperado en el vacío del conmutador de los campos es, aparte del factor  $2i$ , la parte imaginaria de la función de dos puntos calculada en el capítulo 4. Esto facilita mucho el análisis de la expresión, ya que es posible aplicar los mismos métodos asintóticos que en aquel caso. Es más, es suficiente con tomar la parte imaginaria (y añadir el factor  $2i$ ) de los desarrollos previamente calculados. De esta forma, podemos reproducir los resultados obtenidos en [134, 138, 148] para el estudio del conmutador.

## B.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ : conos de luz difuminados

Para valores grandes de  $\rho_1$  (análogamente, de  $\rho_2$ ) el desarrollo asintótico de (B.0.1) es:

$$-i\frac{\tau}{\rho_1^3} + O(\rho_1^{-5}) \quad \left( \text{análogamente,} \quad -i\frac{\tau}{\rho_2^3} + O(\rho_2^{-5}) \right). \quad (\text{B.1.2})$$

Estos desarrollos, válidos para valores grandes de uno de los parámetros radiales, nos indican que el valor del conmutador en una región alejada del eje no es nulo. Sin embargo, si tenemos en cuenta que la separación entre  $\rho_1$  y  $\rho_2$  es arbitrariamente grande (nótese que sólo hemos elegimos uno de ellos como parámetro asintótico, por lo que el otro puede tomar cualquier valor fijo) y que los desarrollos asintóticos anteriores son válidos para cualquier valor de  $\tau$ , vemos que si la relación causal viniese dada por la métrica de Minkowski los puntos  $(R_1, t_1)$  y  $(R_2, t_2)$  considerados no estarían causalmente relacionados, con lo que el conmutador evaluado en esos puntos sería nulo.

Por tanto, este cálculo representa una medida cuantitativa del efecto de “difuminado” de los conos de luz. Éste es un efecto esperado al considerar una teoría cuántica de un sistema gravitatorio. En la figura B.1 que aparece más adelante se observa este efecto, así como la estructura causal a una escala cuántica.



## B.2. Desarrollo en $\tau$ : efectos cuánticos grandes

El desarrollo asintótico de (B.0.1) para valores grandes de  $\tau$  cuando tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  son diferentes de cero es:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}\log\tau} \Im \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) - i\left[\frac{\pi}{2} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right) \Gamma[-i(\rho_1 + \rho_2)] \right. \\ & \quad + \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2)\log\tau\right]\right) \Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)] \\ & \quad + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2) - i[\tau + (\rho_2 - \rho_1)\log\tau]\right) \Gamma[i(\rho_2 - \rho_1)] \\ & \quad \left. + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1) - i[\tau + (\rho_1 - \rho_2)\log\tau]\right) \Gamma[i(\rho_1 - \rho_2)] \right\} + O(1/\log^2\tau). \end{aligned}$$

En el caso en el que bien  $\rho_1$  o  $\rho_2$  sean iguales a cero, las expresiones son:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\sqrt{2\pi\rho}\log\tau} \Im \left\{ \exp\left[\frac{\pi}{2}\rho - i\left(\frac{\pi}{4} + \tau - \rho\log\tau\right)\right] \Gamma(-i\rho) \right. \\ & \quad \left. + \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho + i\left(\frac{\pi}{4} - \tau - \rho\log\tau\right)\right] \Gamma(i\rho) \right\} + O(1/\log^{3/2}\tau), \end{aligned}$$

con  $\rho$  el parámetro radial no nulo.

Como ya hemos remarcado para la función de dos puntos (en el apartado 4.2.2), el aspecto más sorprendente de la expresión anterior es la inusual dependencia en el parámetro  $\tau$ . El lento decaimiento del valor del conmutador con el tiempo sugiere la aparición de los efectos cuánticos grandes estudiados por Ashtekar en [147], especialmente cuando  $\rho_1$  o  $\rho_2$  son nulos.

## B.3. Límite semiclásico: valores grandes de $\rho_1$ , $\rho_2$ y $\tau$

Nos interesa el desarrollo asintótico de (B.0.1) cuando  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\tau$  son simultáneamente grandes, es decir, el desarrollo en el parámetro  $\lambda$  considerado anteriormente para la función de dos puntos.

La contribución principal del desarrollo es<sup>1</sup>:

$$\text{Región I : } 0 \quad (\text{B.3.3a})$$

$$\text{Región II : } \frac{-2i}{\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} K \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}{4\rho_1\rho_2}} \right) \quad (\text{B.3.3b})$$

$$\text{Región III : } \frac{-4i}{\pi\sqrt{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} \right) \quad (\text{B.3.3c})$$

y las primeras correcciones son:

$$\begin{aligned} \text{Región I : } & -\frac{i\tau}{\pi} \left\{ \frac{2\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2} [\rho_1^4 + \rho_2^4 + 2\rho_1^2\tau^2 - 3\tau^4 + 2\rho_2^2\tau^2 - 2\rho_1^2\rho_2^2]}{(\rho_1 + \rho_2 - \tau)^2(\rho_1 - \rho_2 + \tau)^2(-\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2(\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2} \right. \\ & \times E \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} \right) - \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2} [\rho_2^4 + (\tau^2 - \rho_1^2)^2 - 2\rho_2^2(\rho_1^2 + \tau^2)]} \\ & \left. \times K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} \right) \right\} \quad (\text{B.3.4a}) \end{aligned}$$

$$\text{Región II : } \frac{2i}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}|\rho_1 - \rho_2| \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} \sin \left[ \frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1| \left( 1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|} \right) \right] \quad (\text{B.3.4b})$$

$$\begin{aligned} \text{Región III : } & \frac{2i}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} \sin \left[ \frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1| \left( 1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2} \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2}} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + \tau - (\rho_1 + \rho_2) \left( 1 + \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.3.4c}) \end{aligned}$$

El desarrollo asintótico en el eje, cuando bien  $\rho_1$  ó  $\rho_2$  son nulos, tiene la forma:

$$-\theta(\rho - \tau) \frac{2i\tau(\rho^2 + 2\tau^2)}{(\rho^2 - \tau^2)^{5/2}} + \theta(\tau - \rho) \left[ \frac{-2i}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} + \frac{2i \sin(\rho \log \frac{\tau}{\rho} - \tau + \rho)}{\rho \sqrt{\log \frac{\tau}{\rho}}} \right], \quad (\text{B.3.5})$$

donde  $\rho > 0$  es el parámetro radial.

---

<sup>1</sup>En este tipo de desarrollos nos aparecerán integrales elípticas de primera (K), segunda (E) y tercera especie (Π), que están definidas de la forma:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad \Pi(n|k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Tal y como ocurría para la función de dos puntos, los términos principales del desarrollo (tanto en el eje como fuera del mismo) corresponden al conmutador libre (caso plano) calculado con el hamiltoniano  $\hat{H}_0$ . Los demás términos son correcciones a este conmutador libre que, exceptuando el caso en el eje con  $\tau > \rho$ , decaen a cero en el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ . El caso excepcional anterior tiene un término que oscila muy rápidamente al tomar el límite, y en promedio vale cero.

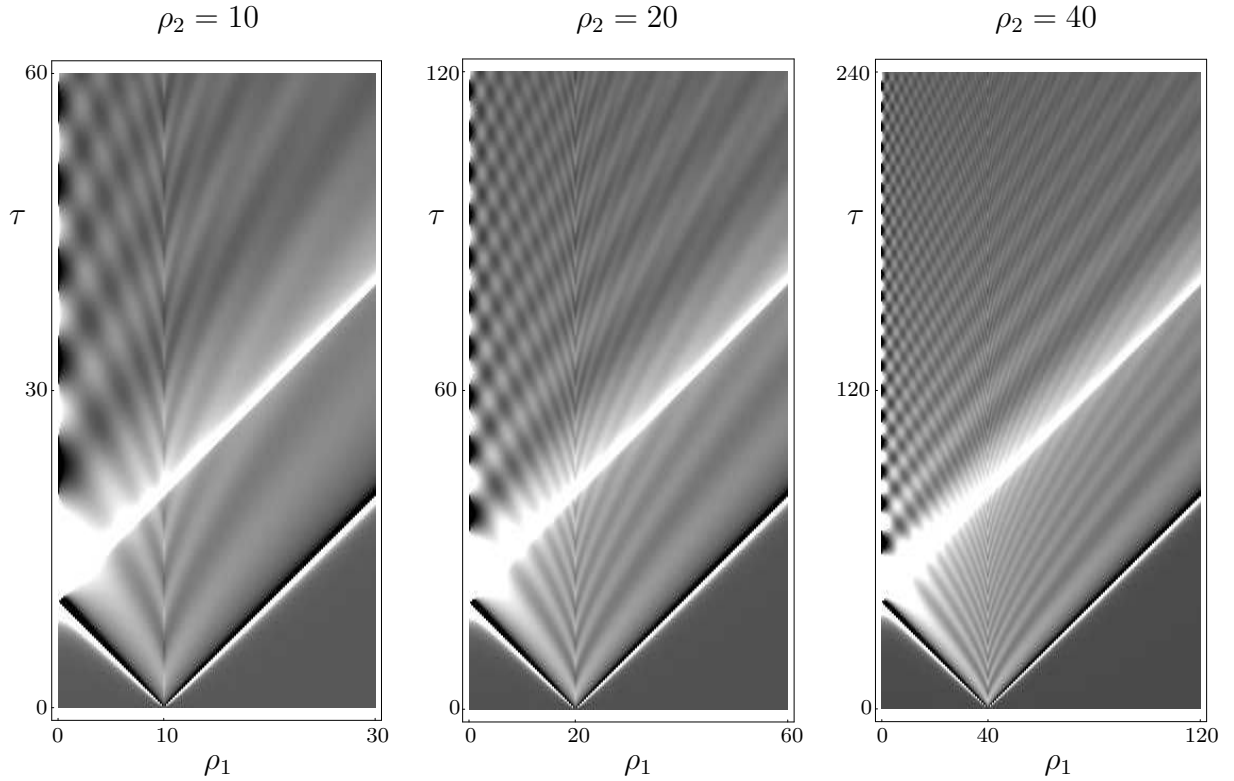


Figura B.1: Estas gráficas (análogas a las mostradas en [148]) representan el valor del elemento de matriz vacío-vacío del conmutador de los campos (multiplicado por  $i$ ) para un valor fijo de  $\rho_2$  y en función de  $\rho_1$  y  $\tau$ . Los puntos en los que la expresión toma valores mayores son representados con un color más claro en la escala de grises. Se observa también el comportamiento singular de la aproximación asintótica en los cambios de región. Las gráficas están dispuestas de forma que la escala se duplique de una a otra para poder así estudiar cómo surge el cono de luz habitual al considerar longitudes mucho mayores que  $4G$ .

Haciendo uso de los desarrollos para el conmutador, podemos representar el valor del mismo en función de  $\rho_1$  y  $\tau$  para diferentes valores de  $\rho_2$  (ver figura B.1). Debido a que el conmutador libre define una estructura de cono de luz característica (la imagen de cono de luz habitual), son justamente las correcciones las que provocan el efecto de cono de

luz difuso. Es importante señalar que, como consecuencia de que el comportamiento del desarrollo asintótico en función de  $\lambda$  es diferente en las distintas regiones, la figura B.1 presenta una singularidad “ficticia” característica de este tipo de desarrollos asintóticos en el cambio de región. Hay que destacar que las expresiones de los desarrollos presentan una dependencia no polinómica en  $1/\lambda$ . Por último, señalar que no es posible obtener este tipo de comportamiento si utilizamos las técnicas perturbativas de la teoría cuántica de campos, donde los objetos se desarrollan como series de potencias en la constante de acoplo. Aquí, haciendo uso de técnicas asintóticas, y dado que disponemos de expresiones exactas para estos objetos, hemos sido capaces de extraer esa información no trivial.

En la figura B.1 se observa también cierta estructura de patrón de interferencia en la región **III** (ver figura C.5). Esto se debe, tal y como podemos leer en la expresión (B.3.4), a la presencia de dos términos oscilantes que interfieren. Esto da una apariencia de un espacio-tiempo dividido en celdas cuyo tamaño está gobernado por la longitud característica  $4G$  del sistema. Aunque en la figura no se aprecia claramente, es importante recordar que, tal y como se deduce de las correcciones para la región **I**, el conmutador no es nulo en esta región, a pesar de que es la región que se encuentra fuera del cono de luz del caso libre. En nuestro caso, el cono de luz está “difuminado”. Por otro lado, se representa en la figura el avance hacia el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ . Se observa que al aumentar la escala de longitudes (al alejarnos de la longitud de Planck del sistema) el cono de luz deja de tener el patrón de interferencias tan claro (se reduce el tamaño de las celdas) y se va recuperando la imagen del cono de luz característico del caso libre.

## B.4. Conmutador cruzado de los campos

La disponibilidad de un campo escalar externo acoplado, nos permite estudiar el conmutador mezclando dos campos de diferente naturaleza, es decir, podemos calcular elementos de matriz de la forma

$$\langle f | [\hat{\phi}_1(R_2; t_2, t_0), \hat{\phi}_0(R_1; t_1, t_0)] | \Omega \rangle \quad (\text{B.4.6})$$

para un estado  $|f\rangle$  diferente del vacío –nótese que el conmutador de estos dos campos en una teoría libre se anula directamente al no existir interacción entre los mismos–.  $|f\rangle$  ha de ser distinto del vacío debido a que los elementos de matriz de este tipo diagonales son siempre nulos –tanto para estados del tipo escalar como para los del gravitatorio– porque involucran productos de un número par de operadores de creación con un número impar de operadores de aniquilación (o viceversa) que al actuar sobre el vacío dan cero. Por otro lado, los valores esperados entre el vacío y estados de una partícula, también se anulan. De

esta forma, el elemento de matriz no nulo más sencillo se obtiene eligiendo

$$|f\rangle = \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_0 f(k_1, k_0) \hat{A}_1^\dagger(k_1) \hat{A}_0^\dagger(k_0) |\Omega\rangle,$$

donde  $f$  satisface la condición de normalización

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(k_1, k_0)|^2 dk_0 dk_1 = 1.$$

El elemento de matriz del conmutador de los campos (B.4.6) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle f | [\hat{\phi}_1(R_2; t_2, t_0), \hat{\phi}_0(R_1; t_1, t_0)] | \Omega \rangle &= 4G \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_0 J_0(R_2 k_1) J_0(R_1 k_0) \bar{f}(k_1, k_0) \\ &\times \left[ e^{i[(t_2-t_0)E(k_1)e^{-4Gk_0} + (t_1-t_0)E(k_0)]} - e^{i[(t_2-t_0)E(k_1) + (t_1-t_0)E(k_0)e^{-4Gk_1}]} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4.7})$$

A pesar de que un análisis exhaustivo de esta expresión requeriría estudiar desarrollos asintóticos de la misma en términos de una función  $f$  general, podemos extraer algunas conclusiones escogiendo una forma simple para  $f$ . Consideremos la función normalizada

$$f(k_1, k_0) = \frac{1}{\hat{k}} \chi_{[k_1(0) - \hat{k}/2, k_1(0) + \hat{k}/2]}(k_1) \chi_{[k_0(0) - \hat{k}/2, k_0(0) + \hat{k}/2]}(k_0),$$

donde  $\chi_V$  es la función característica del conjunto  $V$  y  $\hat{k}$  es una constante con dimensiones de la inversa de la longitud. Para valores de  $\hat{k}$  suficientemente pequeños tales que la función

$$J_0(R_2 k_1) J_0(R_1 k_0) \exp \left( i[(t_2 - t_0)E(k_1)e^{-4Gk_0} + (t_1 - t_0)E(k_0)] \right)$$

sea básicamente constante en la región de integración, el valor de (B.4.6) es:

$$\begin{aligned} &4G\hat{k} J_0[R_2 k_1(0)] J_0[R_1 k_0(0)] \\ &\times \left\{ e^{i[(t_2-t_0)E(k_1(0))e^{-4Gk_0(0)} + (t_1-t_0)E(k_0(0))]} - e^{i[(t_2-t_0)E(k_1(0)) + (t_1-t_0)E(k_0(0))e^{-4Gk_1(0)}]} \right\} \end{aligned}$$

y su módulo al cuadrado

$$8G^2 \hat{k}^2 J_0^2[R_2 k_1(0)] J_0^2[R_1 k_0(0)] \{1 - \cos[4G(t_2 - t_1)E(k_1(0))E(k_0(0))]\}.$$

El primer punto importante que se deduce del resultado anterior es que el conmutador es diferente de cero. Esto nos da una muestra más de que, efectivamente, estamos tratando con una teoría en interacción. Por otro lado, es fácil comprobar que el conmutador se anula cuando  $t_1 = t_2$ , ya que

$$\begin{aligned} \exp \left( i(t_2 - t_0)[E(k_1)e^{-4Gk_0} + E(k_0)] \right) &= \exp \left( i(t_2 - t_0)E(k_1 + k_0) \right) \\ &= \exp \left( i(t_2 - t_0)[E(k_0)e^{-4Gk_1} + E(k_1)] \right). \end{aligned}$$

Finalmente, queremos remarcar que el conmutador cruzado no presenta la estructura causal que hemos encontrado para los conmutadores de campos del mismo tipo (calculando sus valores esperados en el vacío). La magnitud del conmutador cruzado es del orden de  $G\hat{k}$  por lo que, al menos en esta aproximación, es un valor pequeño en comparación con la escala característica del modelo.

# Apéndice C

## Desarrollos asintóticos

A lo largo de todo el trabajo se han utilizado técnicas asintóticas para obtener información física sobre integrales en las que aparecen productos de dos funciones de Bessel. Queremos remarcar que, como se ha podido observar en las figuras de los capítulos 4 y 5, la precisión de este tipo de desarrollos es muy alta, aproximando correctamente la integral incluso fuera de las regiones en las que en principio sería fiable.

Estas técnicas asintóticas fueron introducidas en [148] y algunos de los métodos utilizados, a los que haremos referencia específicamente más adelante, se pueden encontrar en [149, 150].

Calcularemos explícitamente los desarrollos asintóticos correspondientes a la función de dos puntos en los diferentes regímenes. Los del propagador de Newton-Wigner y los de la función de onda, se obtienen mecánicamente –aunque algunos de ellos también con esfuerzo– a partir de las técnicas presentadas en este apéndice.

Consideremos, por tanto, la obtención del desarrollo asintótico de la función de dos puntos (4.3) dada por la integral

$$\int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq \quad (\text{C.0.1})$$

en los diferentes parámetros de interés.

### C.1. Desarrollo asintótico en $\rho_1$ o $\rho_2$ de la función de dos puntos

Estudiaremos, en primer lugar, el desarrollo asintótico de (C.0.1) para valores grandes de uno de los parámetros radiales –bien sea  $\rho_1$  o  $\rho_2$  (el desarrollo asintótico tendrá la misma

forma para ambos debido a la simetría bajo intercambio  $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$  de la integral)–.

En primer lugar escribimos la integral anterior como una “ $h$ -transformada” de la forma

$$H[f; \zeta] = \int_0^\infty h(\zeta t) f(t) dt,$$

donde  $\zeta$  es el parámetro asintótico, y  $f$  y  $h$  son funciones integrables en todo intervalo cerrado contenido en  $(0, \infty)$ . La integral que nos interesa quedaría, escrita de esta forma, de la manera siguiente:

$$H[f; \rho_1] = \int_0^\infty h(\rho_1 q) f(q) dq,$$

donde, en este caso

$$h(\rho_1 q) = J_0(\rho_1 q), \quad f(q) = J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})].$$

Los desarrollos asintóticos de este tipo de “ $h$ -transformadas” pueden tratarse, en muchas ocasiones, con técnicas basadas en transformadas de Mellin [138, 150]. En los casos en los que se cumplen ciertas condiciones sobre el desarrollo asintótico de  $h(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y cuando  $f(t)$  admite un desarrollo asintótico del tipo

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m$$

cuando  $t \rightarrow 0^+$ , el desarrollo asintótico de  $H[f; \zeta]$  viene dado por (ver [138, 150])

$$H[f; \zeta] \sim \sum_{m=0}^{\infty} (\zeta)^{-1-m} p_m M[h; z] \Big|_{z=1+m}, \quad (\text{C.1.2})$$

donde  $M[h; z]$  es la transformada de Mellin<sup>1</sup> de la función  $h$ .

En nuestro caso, tenemos que el desarrollo en serie de  $f(q)$  cuando  $q \rightarrow 0^+$  viene dado por:

$$f(q) \sim 1 - i\tau q + \left(-\frac{\rho_2^2}{4} - \frac{\tau^2}{2} + \frac{i\tau}{2}\right) q^2 + O(q^3),$$

de donde leemos:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = -i\tau, \quad p_2 = -\frac{\rho_2^2}{4} - \frac{\tau^2}{2} + \frac{i\tau}{2}, \quad \dots$$

Por otro lado, la transformada de Mellin de nuestra  $h$  es:

$$M[h; z] = \frac{2^{z-1} \Gamma(z/2)}{\Gamma(1 - z/2)}.$$

---

<sup>1</sup>La transformada de Mellin de una función localmente integrable (integrable en todo intervalo cerrado contenido en  $(0, \infty)$ ) está definida como  $M[f; z] = \int_0^\infty dt t^{z-1} f(t)$ .



De esta forma, particularizando la expresión (C.1.2) con estos resultados, obtenemos para el desarrollo asintótico de la función de dos puntos en  $\rho_1$  (y análogamente en  $\rho_2$ ):

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1^3} \left[ \frac{\rho_2^2}{4} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{i\tau}{2} \right] + O(\rho_1^{-5}), \quad \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2^3} \left[ \frac{\rho_1^2}{4} + \frac{\tau^2}{2} - \frac{i\tau}{2} \right] + O(\rho_2^{-5}).$$

## C.2. Desarrollo asintótico en $\tau$

Estudiamos en primer lugar el desarrollo asintótico de (C.0.1) en  $\tau$  para el caso en el que tanto  $\rho_1$  como  $\rho_2$  sean distintos de cero. Seguidamente estudiaremos el otro caso, aquel en el que alguno de ellos se anula. El caso en el que ambos son cero es trivial, puesto que la integral diverge.

Observando la expresión (C.0.1), vemos que no es una  $h$ -transformada cuando se toma  $\tau$  como parámetro asintótico, por lo que los métodos basados en la transformada de Mellin no son válidos. Desarrollaremos aquí un método basado en el descenso por máxima pendiente que nos dará el desarrollo a primer orden. Sin embargo, se puede encontrar en [138] un procedimiento para estudiar el desarrollo a cualquier orden.

Comenzamos introduciendo en (C.0.1) el cambio de variable  $u = e^{-q}$ . De forma que la integral nos queda

$$e^{-i\tau} \int_0^1 \frac{du}{u} J_0(\rho_1 \log u) J_0(\rho_2 \log u) e^{i\tau u}. \quad (\text{C.2.3})$$

Escribimos esta integral como una integral de contorno en el plano complejo, de forma que sea equivalente a la integración en cada una de las tres partes siguientes (ver figura C.1). La parte  $C_1$ , que será un recorrido por el eje imaginario desde el origen hasta el infinito. La parte  $C_3$  será un recorrido paralelo al eje real “pasando por el infinito imaginario”. Por último, la parte  $C_2$ , vendrá por una recta paralela al eje imaginario que pasa por el punto 1 del eje real desde el infinito imaginario. De esta forma, tenemos que

$$\int_0^1 = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = I_{C_1} + I_{C_2} + I_{C_3}.$$

La contribución de la parte  $C_3$  se anula, debido a la exponencial imaginaria  $e^{i\tau u}$  de la integral. Por tanto, nos queda estudiar las contribuciones de  $C_1$  y  $C_2$ .

Calculamos primero la contribución de  $C_2$ . Parametrizamos el recorrido como:  $u = 1 + is$ . La integral a lo largo de esta curva queda

$$I_{C_2} = \int_0^\infty \frac{1}{i(1 + is)} J_0[\rho_1 \log(1 + is)] J_0[\rho_2 \log(1 + is)] e^{-\tau s} ds. \quad (\text{C.2.4})$$

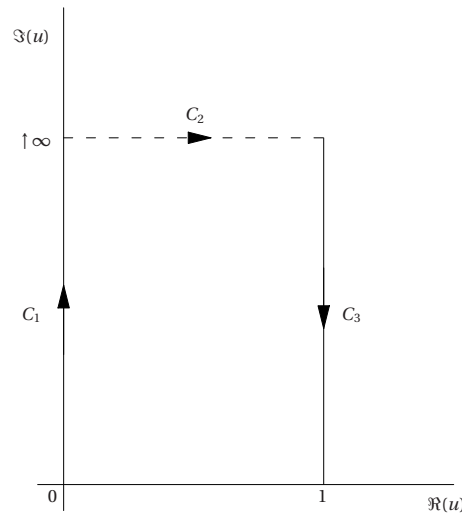


Figura C.1: Curva de integración en el plano complejo para evaluar la integral (C.2.3). Distinguimos tres partes: la curva  $C_1$ , que se extiende hasta el infinito, la  $C_3$  que dará una contribución nula y la  $C_2$  que completará el recorrido para llegar al punto 1 del eje real.

Para estudiar el comportamiento asintótico de este tipo de integrales se utiliza el lema de Watson (ver [149, 150]).

**Lema de Watson:** Sea  $I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$ ; donde  $\lambda$  es el parámetro asintótico. Asumamos que  $f(t)$  es localmente integrable en  $(0, \infty)$ , y que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $f(t) = O(e^{at})$  para algún número real  $a$ . Además, supondremos que cuando  $t \rightarrow 0^+$ ,  $f(t)$  satisface  $f(t) \sim \sum_{m=0}^\infty c_m t^{a_m}$ , con  $\Re(a_m) \uparrow \infty$  y  $\Re(a_0) > -1$ . Entonces, para valores grandes de  $\lambda$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), tenemos:

$$I(\lambda) \sim \sum_{m=0}^\infty \frac{c_m \Gamma(a_m + 1)}{\lambda^{a_m + 1}}.$$

Observamos que la integral (C.2.4) tiene la forma para la cual el lema de Watson es válido, con parámetro asintótico  $\tau$  y

$$f(s) = \frac{1}{i(1+is)} J_0[\rho_1 \log(1+is)] J_0[\rho_2 \log(1+is)].$$

La función  $f$  cumple las condiciones, por lo que buscamos su desarrollo en serie cuando  $s \rightarrow 0^+$ :

$$f(s) \sim -i - s + \left(i - \frac{i\rho_1^2}{4} - \frac{i\rho_2^2}{4}\right)s^2 + O(s^3).$$

Por tanto, utilizando la fórmula del lema, el desarrollo asintótico de la integral en el recorrido

$C_2$  es:

$$I_{C_2} \sim \frac{-i}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} + O(\tau^{-3}). \quad (\text{C.2.5})$$

Seguimos ahora con el cálculo del desarrollo asintótico en  $\tau$  de (4.3) en la parte  $C_1$ . Parametrizamos este recorrido como:  $u = is$ . La integral toma la forma:

$$I_{C_1} = e^{-i\tau} \int_0^\infty \frac{1}{s} J_0(\rho_1 \log is) J_0(\rho_2 \log is) e^{-\tau s} ds.$$

En esta ocasión, debido a que el comportamiento de  $f$  cuando  $s \rightarrow 0^+$  no es el apropiado (el logaritmo diverge para estos valores), no podemos aplicar el lema de Watson. El método alternativo que seguiremos se basa en usar la representación integral de las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}} \exp \left[ \frac{x}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right],$$

donde  $\gamma$  es un contorno cerrado, orientado en sentido antihorario y que contiene a  $z = 0$ . Introduciendo esta expresión en la integral, teniendo en cuenta que  $\log is = \log s + i\pi/2$ , y utilizando el teorema de Fubini para cambiar los órdenes de integración, obtenemos:

$$I_{C_1} = \frac{-e^{-i\tau}}{(2\pi)^2} \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 \frac{1}{t_1 t_2} e^{i\frac{\pi}{4} X(t_1, t_2)} \int_0^\infty ds s^{\left(\frac{X(t_1, t_2)}{2} - 1\right)} e^{-\tau s},$$

donde hemos definido  $X(t_1, t_2)$  como

$$X(t_1, t_2) = \rho_1 \left( t_1 - \frac{1}{t_1} \right) + \rho_2 \left( t_2 - \frac{1}{t_2} \right).$$

La integral anterior converge si

$$\Re\{X(t_1, t_2)\} > 0.$$

Una manera de garantizar esto corresponde a tomar circuitos de integración  $\gamma_1, \gamma_2$  que se encuentren en el área sombreada en la figura C.2. Recordamos que por la construcción de la representación integral de las funciones de Bessel estos contornos han de contener al origen. Si utilizamos ahora la definición integral<sup>2</sup> de la función  $\Gamma$ , podemos escribir:

$$I_{C_1} = \frac{-e^{-i\tau}}{(2\pi)^2} \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 \frac{1}{t_1 t_2} e^{i\frac{\pi}{4} X(t_1, t_2)} \Gamma(X(t_1, t_2)/2) e^{-\frac{1}{2} X(t_1, t_2) \log \tau}.$$

Tomaremos como parámetro asintótico  $\log \tau$ , y utilizamos el método de descenso por la máxima pendiente para hallar el desarrollo asintótico de  $I_{C_1}$ . Los puntos relevantes en el desarrollo asintótico de la integral serán los puntos críticos del exponente del integrando. En nuestro caso, y tomando un contorno del tipo de la figura C.2, los únicos puntos críticos

<sup>2</sup>La función  $\Gamma$  está definida como  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ .

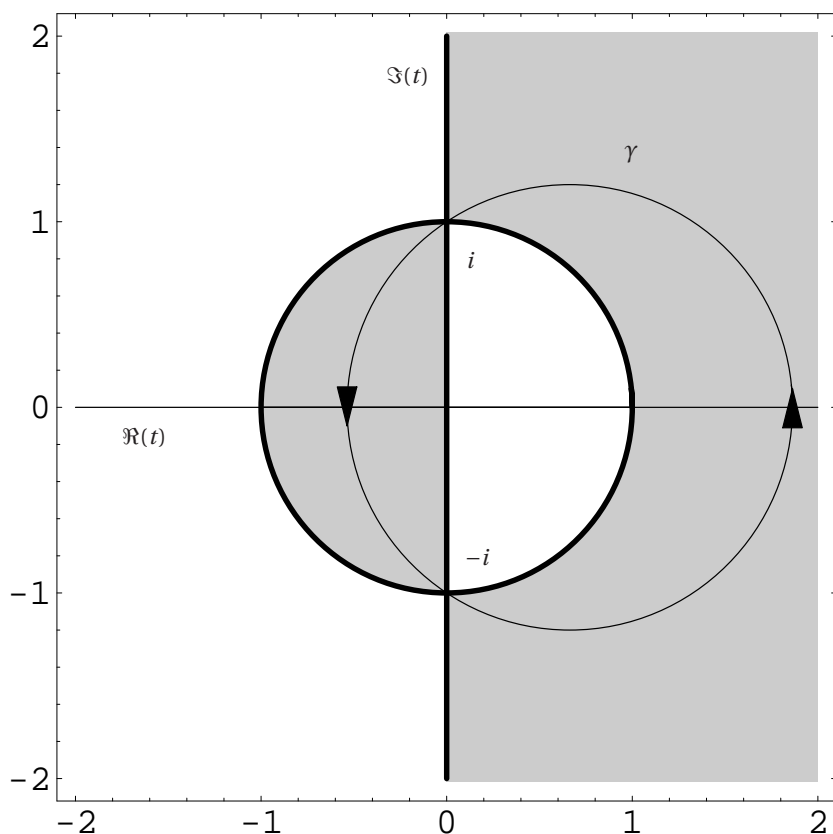


Figura C.2: La región en la que  $\Re(t - 1/t) > 0$  consiste en el área sombreada. Una posible elección para el contorno de integración podría ser  $\gamma$ .

son los puntos de silla de  $X(t_1, t_2)$ . En  $t = \pm i$ , la función compleja  $(t - 1/t)$  tiene un punto de silla, ya que su derivada se anula en ese punto. Por tanto, en los puntos del contorno en los que bien  $t_1$ ,  $t_2$  o ambos son iguales a  $i$  ó  $-i$ , tenemos un punto crítico. En la figura C.2 vemos que cualquier contorno válido debe pasar por los puntos  $i$  y  $-i$ . Al tener dos integrales con dos puntos de silla cada una, tenemos que tomar las posibles combinaciones dos a dos de sus contribuciones, obteniendo al final cuatro términos que debemos sumar. Integraremos cada una de las contribuciones de los puntos de silla en un entorno alrededor de los mismos. Para facilitar el cálculo, y sin que tenga repercusión en el resultado al venir la máxima contribución del punto de silla, extenderemos ese pequeño intervalo contenido en el entorno a toda la recta real, es decir, de  $-\infty$  a  $+\infty$  (ver [149]).

El primer caso que consideraremos es  $t_1 = i = t_2$ . En el punto  $t = i$ , podemos parame- trizar el entorno en el que vamos a integrar como:

$$t = i - (1 + i)\sigma$$

y hasta segundo orden en  $\sigma$ :

$$t - \frac{1}{t} \simeq 2(i + \sigma^2).$$

Introduciendo estos resultados en las integrales sobre  $t_1$  y  $t_2$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2) \log \tau\right]\right) \\ & \times \Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)] \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 e^{-\rho_1 \log \tau \sigma_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2 e^{-\rho_2 \log \tau \sigma_2^2}. \end{aligned}$$

Integrando las gaussianas llegamos finalmente a que la contribución del par de puntos de silla ( $t_1 = i, t_2 = i$ ) es

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}\log\tau} \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2) \log \tau\right]\right) \Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)].$$

Procedemos de forma análoga para los otros tres casos (cuidando en cada caso la parametrización del recorrido). Finalmente, la suma de las contribuciones, nos dará el valor de  $I_{C_1}$ .

$$\begin{aligned} I_{C_1} \sim & \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}\log\tau} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) - i\left[\frac{\pi}{2} + \tau - (\rho_1 + \rho_2) \log \tau\right]\right) \Gamma[-i(\rho_1 + \rho_2)] \right. \\ & + \exp\left(-\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2) + i\left[\frac{\pi}{2} - \tau - (\rho_1 + \rho_2) \log \tau\right]\right) \Gamma[i(\rho_1 + \rho_2)] \\ & + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2) - i[\tau + (\rho_2 - \rho_1) \log \tau]\right) \Gamma[i(\rho_2 - \rho_1)] \\ & \left. + \exp\left(\frac{\pi}{2}(\rho_2 - \rho_1) - i[\tau + (\rho_1 - \rho_2) \log \tau]\right) \Gamma[i(\rho_1 - \rho_2)] \right\} + O(1/\log^2 \tau). \end{aligned} \quad (C.2.6)$$

Observamos en las ecuaciones (C.2.5, C.2.6) que para valores grandes de  $\tau$ ,  $I_{C_2}$  es despreciable frente a  $I_{C_1}$ , debido al decaimiento con  $(\log \tau)$  de este último. Por tanto, el desarrollo asintótico en  $\tau$  de la función de dos puntos cuando  $\rho_1 \neq 0 \neq \rho_2$  vendrá dada por (C.2.6).

El comportamiento asintótico en  $\tau$  cuando bien  $\rho_1$  ó  $\rho_2$  son nulos se calcula de forma análoga al caso con ambos distintos de cero. Ahora tendremos solamente la integral en  $t_1$  (o en  $t_2$ ) y a la hora de aplicar el método de descenso por la máxima pendiente tendremos solamente dos contribuciones. De esta forma obtenemos para los desarrollos asintóticos en este caso:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho\log\tau}} \left\{ \exp\left[\frac{\pi}{2}\rho - i\left(\frac{\pi}{4} + \tau - \rho \log \tau\right)\right] \Gamma(-i\rho) \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho + i\left(\frac{\pi}{4} - \tau - \rho \log \tau\right)\right] \Gamma(i\rho) \right\} + O(1/\log^{3/2} \tau), \end{aligned}$$

siendo  $\rho$  el parámetro radial que no es cero.

### C.3. Desarrollo asintótico para $\rho_1$ , $\rho_2$ y $\tau$ simultáneamente grandes

Estudiaremos ahora la obtención de un desarrollo asintótico de (C.0.1) válido en el límite “clásico-gravitatorio”, que corresponde a tomar  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $\tau$  grandes preservando sus valores relativos. Con este fin, vamos a reescribir la integral (C.0.1) como

$$\int_0^\infty J_0(\rho_1 q) J_0(\rho_2 q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq = \int_0^\infty J_0(\lambda r_1 q) J_0(\lambda r_2 q) \exp[-i\lambda t(1 - e^{-q})] dq,$$

donde  $\rho_1 = \lambda r_1$ ,  $\rho_2 = \lambda r_2$ , y  $\tau = \lambda t$  con  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $t$  fijados y  $\lambda$  un nuevo parámetro que consideraremos grande (tomaremos  $\lambda$  como el parámetro asintótico  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Utilizando de nuevo la representación integral de las funciones de Bessel, ésta toma la forma

$$-\frac{e^{-it\lambda}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq \oint_{\gamma_1} dz_1 \oint_{\gamma_2} dz_2 \frac{1}{z_1 z_2} \exp\left(\lambda \left[\frac{qr_1}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{qr_2}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right) + ite^{-q}\right]\right). \quad (\text{C.3.7})$$

Ahora, utilizaremos el método descrito en [148] para obtener los desarrollos asintóticos de integrales del tipo

$$\int_B^A dq \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 f_{(0)}(q; t_1, t_2) e^{\lambda \Phi(q; t_1, t_2)}, \quad (\text{C.3.8})$$

con ( $0 \leq B < A$ ). Para ello definimos  $\|\nabla \Phi\|^2 := \eta_q(\partial_q \Phi)^2 + \eta_1(\partial_1 \Phi)^2 + \eta_2(\partial_2 \Phi)^2$  donde  $\eta_q$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son tres funciones de  $q$ ,  $t_1$  y  $t_2$  que, para facilitar cálculos posteriores elegiremos como:  $\eta_q = -1$ ,  $\eta_1 = t_1^2$ ,  $\eta_2 = t_2^2$ .

En los casos en los que  $\|\nabla \Phi\|^2 \neq 0$  para todos los puntos de la región de integración es posible escribir la integral (C.3.8) en el límite ( $A \rightarrow \infty$ ) de la forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda} \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 \frac{f_{(0)} \eta_q \partial_q \Phi e^{\lambda \Phi}}{\|\nabla \Phi\|^2} \Big|_B + \lim_{A \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda} \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 \frac{f_{(0)} \eta_q \partial_q \Phi e^{\lambda \Phi}}{\|\nabla \Phi\|^2} \Big|_A \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \int_B^A dq \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 f_{(1)}(q; t_1, t_2) e^{\lambda \Phi(q; t_1, t_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.3.9})$$

donde hemos utilizado la notación

$$f_{(1)} := \partial_q \frac{f_{(0)} \eta_q \partial_q \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} + \partial_1 \frac{f_{(0)} \eta_{t_1} \partial_1 \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} + \partial_2 \frac{f_{(0)} \eta_{t_2} \partial_2 \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2}. \quad (\text{C.3.10})$$

Escribimos la integral (C.3.7) como suma de tres integrales  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , y tomamos diferentes contornos para cada una de ellas. Haremos este paso introduciendo neutralizadores  $\nu_j(q)$ . Éstos, son funciones  $C^\infty$  de  $q$  con soporte compacto tales que  $0 \leq \nu_j \leq 1$  y cuya suma es la unidad, de forma que podemos escribir:  $I = I_1 + I_2 + I_3$ . Tomaremos las funciones  $\nu_j(q)$

de forma que nos facilite el estudio asintótico (ver figura C.3). Así, elegimos  $\nu_1$  como una función que toma valores nulos a partir de cierto valor  $\alpha$ , es decir,  $\nu_1(q) = 0$  si  $q \in [\alpha, \infty)$ . Es conveniente elegir el valor  $\alpha$  de manera que el integrando no tenga puntos críticos (no se anule  $\|\nabla\Phi\|^2$ ) para  $q < \alpha$ . De esta forma, podremos utilizar la expresión (C.3.9) para  $I_1$ . Tomaremos  $\nu_2(q)$  tal que tenga valores no nulos en un intervalo  $[\alpha_1, \beta]$ , con  $\alpha_1 < \alpha$  y siendo  $\beta$  lo suficientemente grande como para que los puntos críticos del exponente del integrando estén situados en la región  $\alpha < q < \beta_1$ , con  $\beta_1 < \beta$ . Es decir,  $I_2$  nos proporcionará toda la contribución de los puntos críticos. Por último,  $\nu_3(q)$  tomará valores no nulos en el intervalo  $[\beta_1, \infty)$ , y no habrá ningún punto crítico en esta región. Las integrales  $I_1$  e  $I_3$ , al no tener

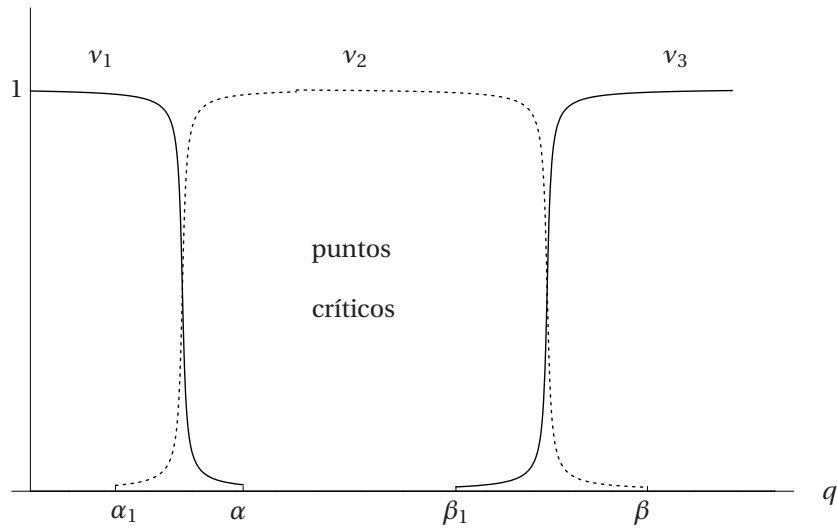


Figura C.3: Funciones  $\nu_j(q)$ . Los puntos críticos del exponente del integrando se darán para valores de  $q$  entre  $\alpha$  y  $\beta_1$ .

puntos críticos, pueden ponerse de la forma (C.3.9). Debido a las propiedades de los neutralizadores  $\nu_1$  y  $\nu_3$ , la integral  $I_1$  no tendrá el término correspondiente al segundo sumando de (C.3.9) y para la integral  $I_3$  se anulará el primero. Por otra parte, se demuestra [148] que para el tipo de integral que nos concierne, el segundo sumando de (C.3.9), que aparecerá en  $I_3$ , tiene una contribución despreciable frente a los otros. Además, como veremos al hacer el cálculo detallado, en la expresión (C.3.9), siempre que no sea nulo el primer sumando, la contribución del tercero (segundo orden en  $1/\lambda$ ) es despreciable frente al primero (primer orden en  $1/\lambda$ ) y frente a las correcciones que vendrán de la contribución de  $I_2$  (de nuevo, siempre que éstas no se anulen). De esta forma, el desarrollo asintótico de la integral  $I$  queda:

$$I \sim -\frac{1}{\lambda} \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 \frac{f_{(0)} \eta_q \partial_q \Phi e^{\lambda \Phi}}{\|\nabla \Phi\|^2} \Big|_B + I_2 - \frac{1}{\lambda} \int_B^A dq \oint_{\gamma_1} dt_1 \oint_{\gamma_2} dt_2 f_{(1)}(q; t_1, t_2) e^{\lambda \Phi(q; t_1, t_2)},$$

donde hemos introducido el último término para usarlo en el caso de que (como efectivamente ocurre) haya una región del espacio donde la contribución de  $I_2$  se anule. Calculamos ahora el primer sumando de la expresión anterior. En nuestro caso, la ecuación (C.3.7), conduce a:

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ \Phi(q; z_1, z_2) &= \frac{qr_1}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{qr_2}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right) + ite^{-q}, \\ f_{(0)}(q; z_1, z_2) &= -\frac{e^{-it\lambda}}{4\pi^2 z_1 z_2}. \end{aligned}$$

Operando, y recordando que  $\eta_q = -1$ ,  $\eta_1 = z_1^2$  y  $\eta_2 = z_2^2$ , obtenemos:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2 \lambda} \oint dz_1 \oint dz_2 \frac{1}{r_2 z_1 (z_2^2 - 1) + z_2 (r_1 (z_1^2 - 1) - 2it z_1)}. \quad (\text{C.3.11})$$

Para el análisis asintótico de integrales múltiples es conveniente imponer que la parte real del exponente del integrando sea menor o igual que cero ( $\Re(\Phi(q; z_1, z_2)) \leq 0$ ). Esto es debido a que en las integrales de tipo Laplace o Fourier es sencillo identificar los puntos críticos del factor exponencial del integrando, que en este caso, serán un número finito de puntos aislados que pueden ser estudiados utilizando neutralizadores. La condición anterior se consigue tomando contornos en el plano complejo cuyos puntos cumplan:  $\Re(z - 1/z) \leq 0$ , lo cual marca una región en el plano complejo en la que podemos tener nuestros contornos de integración (ver figura C.4). Para ciertos valores de los parámetros,  $\|\nabla\Phi\|^2$  se puede anular en puntos que estén sobre la circunferencia unidad, por lo que es conveniente tomar contornos que la eviten, como el dibujado en la figura. Es posible calcular de forma exacta la integral (C.3.11) por el mismo procedimiento explicado en [148]. La forma de la integral es distinta según la región del espacio<sup>3</sup>  $(r_1, r_2, t)$ . Al reabsorber  $\lambda$  (recordamos que  $\rho_{1,2} = \lambda r_{1,2}$  y  $\tau = \lambda t$ ), las distintas regiones se convierten en regiones del espacio  $(\rho_1, \rho_2, \tau)$  –tomaremos valores positivos de  $\tau$ , siendo trivial la generalización para valores negativos–. Éstas son (ver figura C.5):

$$\begin{aligned} \text{Región I :} & \quad \tau \leq |\rho_2 - \rho_1| \\ \text{Región II :} & \quad |\rho_2 - \rho_1| < \tau < \rho_1 + \rho_2 \\ \text{Región III :} & \quad \tau \geq \rho_1 + \rho_2 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Ésta es la razón por la que tuvimos que introducir estas regiones en el capítulo 4 para escribir el desarrollo asintótico correspondiente.



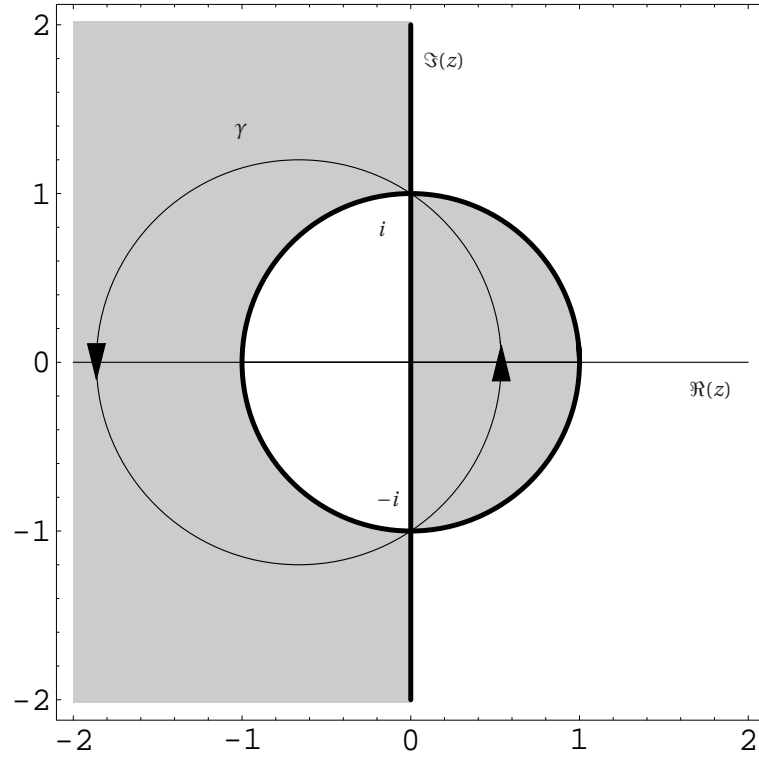


Figura C.4: La región en la que  $\Re(z - 1/z) \leq 0$  consiste en el área sombreada. Una posible elección para el contorno de integración podría ser  $\gamma$ . Nótese que este contorno, utilizado ya en [148], es distinto al considerado en la figura C.2 para el desarrollo asintótico en  $\tau$ .

De esta forma, el cálculo de la integral nos da la contribución principal al desarrollo asintótico<sup>4</sup>:

$$\text{Región I: } \frac{2}{\pi \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}} \right) \quad (\text{C.3.12a})$$

$$\text{Región II: } \frac{1}{\pi \sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ K \left( \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}{4\rho_1\rho_2}} \right) - i K \left( \sqrt{\frac{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}{4\rho_1\rho_2}} \right) \right] \quad (\text{C.3.12b})$$

$$\text{Región III: } \frac{-2i}{\pi \sqrt{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} K \left( \sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{\tau^2 - (\rho_2 - \rho_1)^2}} \right) \quad (\text{C.3.12c})$$

<sup>4</sup>Recuérdese la definición de las integrales elípticas de primera (K) y segunda especie (E):

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

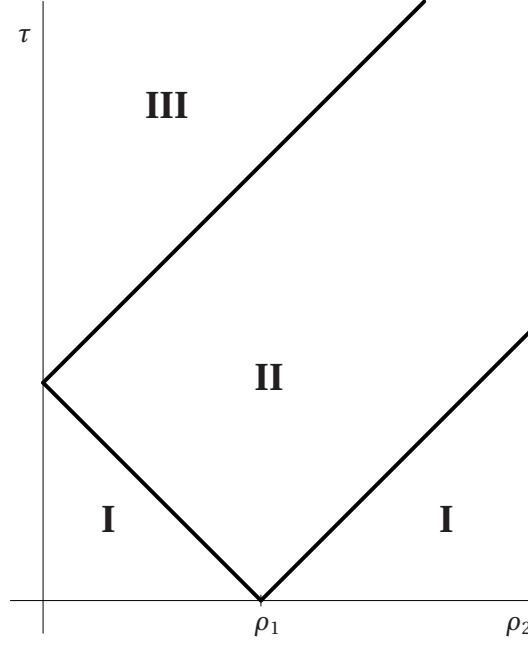


Figura C.5: En esta figura se representan, para un valor fijo de  $\rho_1$ , las tres regiones del espacio  $(\rho_2, \tau)$ . La integral (C.3.11) tiene una forma diferente en cada región.

Una vez encontrado el término principal del desarrollo asintótico pasamos a calcular las correcciones, que vendrán dadas por la integral

$$I_2 = -\frac{e^{-it\lambda}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq \oint_{\gamma_1} dz_1 \oint_{\gamma_2} dz_2 \frac{\nu_2(q)}{z_1 z_2} \exp \left( \lambda \left[ \frac{qr_1}{2} \left( z_1 - \frac{1}{z_1} \right) + \frac{qr_2}{2} \left( z_2 - \frac{1}{z_2} \right) + ite^{-q} \right] \right),$$

que contiene las contribuciones de los puntos críticos.

En esta ocasión conviene tomar como contornos de integración la circunferencia unidad, ya que parametrizándola por un ángulo  $\theta$ ,  $z(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  el exponente  $\lambda\Phi(q; z_1, z_2)$  se convierte en una función puramente imaginaria de  $q, \theta_1, \theta_2$ . Así, la integral toma la forma de una integral múltiple de tipo Fourier, cuyo desarrollo asintótico se puede estudiar utilizando técnicas estándar [150]. Parametrizando los contornos, la integral queda:

$$-\frac{e^{-it\lambda}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq \int_{-\pi}^\pi d\theta_1 \int_{-\pi}^\pi d\theta_2 \nu_2(q) e^{i\lambda(r_1 q \sin \theta_1 + r_2 q \sin \theta_2 + te^{-q})}.$$

El desarrollo asintótico de integrales múltiples de tipo Fourier, esto es, de la forma

$$F(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} g_0(\mathbf{x}) e^{i\lambda\phi(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x}, \quad \text{con} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\text{C.3.13})$$

se obtiene estudiando los puntos críticos, que son los puntos de la frontera de la región de integración  $\mathcal{D}$  y los puntos del interior donde el gradiente de la función real  $\phi$  se anula. En

nuestro caso, debido a la presencia del neutralizador  $\nu_2(q)$ , que se anula en la frontera, sólo debemos preocuparnos por los puntos críticos en los que  $\nabla\phi = 0$ . Cada uno de ellos dará una contribución al desarrollo asintótico que deberá ser sumada para obtener el resultado final.

Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto en el que el gradiente de  $\phi$  es nulo. Entonces, la contribución de este punto crítico al desarrollo asintótico de (C.3.13) viene dada por [150]

$$F(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{g_0(\mathbf{x}_0) \exp\left(i\lambda\phi(\mathbf{x}_0) + \frac{i\pi}{4} \text{sig H}(\mathbf{x}_0)\right)}{\sqrt{|\det H(\mathbf{x}_0)|}}, \quad (\text{C.3.14})$$

donde  $n$  es la dimensión de la región de integración,  $H$  es el Hessiano de  $\phi$ , y  $\text{sig H}(\mathbf{x}_0)$  y  $\det H(\mathbf{x}_0)$  son la signatura y el determinante del mismo evaluados en  $\mathbf{x}_0$ .

En nuestro caso

$$\phi(q, \theta_1, \theta_2) = r_1 q \sin \theta_1 + r_2 q \sin \theta_2 + t e^{-q},$$

$n = 3$  y los puntos críticos serán:

$$\begin{aligned} (q = \log \frac{t}{r_1 + r_2}, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}) & \quad q > 0 \Rightarrow t > (r_1 + r_2), \\ (q = \log \frac{t}{r_1 - r_2}, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}) & \quad q > 0 \Rightarrow t > (r_1 - r_2) > 0, \\ (q = \log \frac{t}{r_2 - r_1}, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}) & \quad q > 0 \Rightarrow t > (r_2 - r_1) > 0. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (C.3.14) tenemos que  $I_2$  da correcciones al desarrollo asintótico en las regiones **II** y **III**, mientras que tiene contribución nula en la región **I**, lo que nos obliga a tener que utilizar el tercer término de la expresión (C.3.9) para la integral  $I_1$ . Las correcciones para las regiones **II** y **III**, tras haber absorbido el parámetro  $\lambda$ , son

$$\begin{aligned} \text{Región II :} & \quad \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} \\ \text{Región III :} & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} + \frac{e^{-i\left[\frac{\pi}{4} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)(1 + \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2})\right]}}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2} \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2}} \right\}. \end{aligned}$$

Calculamos la corrección al desarrollo asintótico en la región **I**. Haciendo uso de la fórmula para el cálculo de  $f_{(1)}$  (C.3.10) y utilizando (C.3.9) de nuevo sobre la integral de  $f_{(1)}$ , obtenemos la siguiente expresión de segundo orden en  $1/\lambda$  para la corrección:

$$\frac{2i\tau}{\pi^2} \oint dz_1 \oint dz_2 \frac{z_1^2 z_2^2}{\left[\rho_2 z_1 (z_2^2 - 1) + z_2 (\rho_1 (z_1^2 - 1) - 2i\tau z_1)\right]^3}, \quad (\text{C.3.15})$$

donde hemos reabsorbido el parámetro  $\lambda$ . En [148] se estudia la resolución de esta integral, y se da la solución exacta para la región I. De esta forma, obtenemos la primera corrección asintótica para esta región. Resumiendo, las correcciones a (C.3.12) en las diferentes regiones son:

$$\begin{aligned} \text{Región I: } & -\frac{i\tau}{2\pi} \left\{ \frac{2\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}[\rho_1^4 + \rho_2^4 + 2\rho_1^2\tau^2 - 3\tau^4 + 2\rho_2^2\tau^2 - 2\rho_1^2\rho_2^2]}{(\rho_1 + \rho_2 - \tau)^2(\rho_1 - \rho_2 + \tau)^2(-\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2(\rho_1 + \rho_2 + \tau)^2} \right. \\ & \times E\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) - \frac{2\tau^2}{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}[\rho_2^4 + (\tau^2 - \rho_1^2)^2 - 2\rho_2^2(\rho_1^2 + \tau^2)]} \\ & \left. \times K\left(\sqrt{\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 - \tau^2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.3.16a})$$

$$\text{Región II: } \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} \quad (\text{C.3.16b})$$

$$\text{Región III: } \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\rho_2}} \left\{ \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \tau + |\rho_2 - \rho_1|(1 + \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|})\right]}}{\sqrt{|\rho_1 - \rho_2|} \log \frac{\tau}{|\rho_2 - \rho_1|}} + \frac{e^{-i\left[\frac{\pi}{4} + \tau - (\rho_1 + \rho_2)(1 + \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2})\right]}}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2} \log \frac{\tau}{\rho_1 + \rho_2}} \right\}. \quad (\text{C.3.16c})$$

El desarrollo asintótico en el caso en el que bien  $\rho_1 = 0$  ó  $\rho_2 = 0$  se calcula siguiendo un procedimiento análogo al anterior, solo que en esta ocasión solo aparecerá una función de Bessel, y el cálculo se simplificará notablemente. El resultado final del desarrollo es:

$$\theta(\rho - \tau) \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2}} - \frac{i\tau(\rho^2 + 2\tau^2)}{(\rho^2 - \tau^2)^{5/2}} \right] + \theta(\tau - \rho) \left[ \frac{-i}{\sqrt{\tau^2 - \rho^2}} + \frac{\exp(i[\rho \log \frac{\tau}{\rho} - \tau + \rho])}{\rho \sqrt{\log \frac{\tau}{\rho}}} \right],$$

donde  $\rho$  es el parámetro radial no nulo.

## Apéndice D

# Cálculo numérico de integrales que contienen dos funciones de Bessel

A lo largo de todo el trabajo hemos tenido que tratar en varias ocasiones con integrales impropias que contienen productos de funciones de Bessel. La naturaleza oscilatoria de los integrandos, el hecho de que éstas estén definidas en el semieje positivo de la recta real y que, en general, sean condicionalmente convergentes, hace que sea crucial el encontrar una forma eficiente de calcularlas numéricamente. Aquí presentamos el método que ha sido utilizado para generar las gráficas de gran parte de las figuras que hemos mostrado a lo largo del texto. La proximidad entre las estimaciones numéricas y la aproximación analítica dada por los desarrollos asintóticos es una prueba de la alta precisión tanto de las unas como de los otros.

Consideremos integrales del tipo

$$I(\rho, \sigma, \tau) := \int_0^\infty J_\mu(\rho q) J_\nu(\sigma q) f(q) \exp[-i\tau(1 - e^{-q})] dq$$

con  $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ , y  $f(q)$  una función suficientemente regular tal que la integral sea, por lo menos, condicionalmente convergente. Primero efectuamos el cambio de variables  $s = e^{-q}$ , y obtenemos:

$$I(\rho, \sigma, \tau) = e^{-i\tau} \int_0^1 \frac{e^{i\tau s}}{s} J_\mu(-\rho \log s) J_\nu(-\sigma \log s) f(-\log s) ds.$$

Ahora, escribimos la integral como suma de dos integrales de contorno,  $I_1$  e  $I_2$ , en el plano complejo  $s$  definidas sobre los recorridos  $C_1 = \{iu : u \in [0, \infty)\}$  y  $C_2 = \{1 + iu : u \in$

$[0, \infty)\}$ :

$$I_1(\rho, \sigma, \tau) = e^{-i\tau} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau u}}{u} J_\mu(-\rho \log iu) J_\nu(-\sigma \log iu) f(-\log iu) du,$$

$$I_2(\rho, \sigma, \tau) = -i \int_0^\infty \frac{e^{-\tau u}}{1+iu} J_\mu(-\rho \log[1+iu]) J_\nu(-\sigma \log[1+iu]) f(-\log[1+iu]) du.$$

Para las funciones  $f$  que aparecen en este trabajo, la segunda integral  $I_2$  se comporta muy bien, debido a su decaimiento exponencial y a que el integrando es no-singular. Ésta se puede calcular numéricamente sin dificultad. Por otro lado, aunque la integral  $I_1$  sea convergente, el integrando tiene un molesto comportamiento oscilatorio cerca de  $u = 0$ . Una forma de hacerla más tratable es usar la representación integral de las funciones de Bessel introducida en el apéndice C para escribirla como la integral múltiple

$$I_1(\rho, \sigma, \tau) = e^{-i\tau} \int_0^\infty du \oint_{\gamma_1} \frac{dz_1}{z_1^{\mu+1}} \oint_{\gamma_2} \frac{dz_2}{z_2^{\nu+1}} \frac{f(-\log(iu))}{u} \times \exp\left(-\left[\frac{\rho}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right)\right] \log(iu) - \tau u\right) \quad (\text{D.0.1})$$

donde  $\gamma_{1,2}$  son contornos cerrados de integración en el plano complejo que contienen al origen en su interior. Eligiendo estos contornos cuidadosamente (satisfaciendo, por ejemplo, las condiciones  $\Re(z_1 - 1/z_1) \leq 0$  y  $\Re(z_2 - 1/z_2) \leq 0$ ) es posible en la mayoría de los casos –los casos tratados en el texto en particular– garantizar que

$$\int_0^\infty \frac{f(-\log(iu))}{u} \exp\left(-\left[\frac{\rho}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right)\right] \log(iu) - \tau u\right) du$$

sea convergente. Esto nos permite cambiar el orden de integración en (D.0.1). Además, para ciertas funciones  $f$  (la mayoría de los casos que aparecen en este trabajo) esta última integral en  $u$  se puede calcular de forma analítica, quedando  $I_1$  descrita como una integral doble de una función regular (excepto para conjuntos de los parámetros  $\rho$ ,  $\sigma$ , y  $\tau$  de medida cero) definida en un conjunto con la topología de un 2-toro. Por ejemplo, si  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$  y  $f = 1$  (caso de la función de dos puntos) tenemos:

$$I_1(\rho, \sigma, \tau) = \frac{e^{-i\tau}}{4\pi^2} \oint_{\gamma_1} \frac{dz_1}{z_1} \oint_{\gamma_2} \frac{dz_2}{z_2^2} \exp\left(\left[\frac{\rho}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right)\right] \left(i\frac{\pi}{2} - \log \tau\right)\right) \times \Gamma\left[\frac{\rho}{2}\left(z_1 - \frac{1}{z_1}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(z_2 - \frac{1}{z_2}\right)\right].$$

Ahora, el integrando se comporta razonablemente y la integral se puede calcular numéricamente con los métodos usuales de una forma rápida y eficiente utilizando, por ejemplo, programas comerciales como *Mathematica* [171].

# Bibliografía

## Historia de la gravedad cuántica

- [1] A. Einstein, “Naeherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation”, *Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungsberichte*, 688 (1916).
- [2] L. Rosenfeld, “Zur Quantelung der Wellenfelder”, *Ann. der Physik* **5**, 113 (1930).
- [3] L. Rosenfeld, “On quantization of fields”, *Nucl. Phys.* **40**, 353 (1963).
- [4] R. Feynman, “Quantum theory of gravitation”, *Acta Physical Polonica.* **24**, 697 (1963).
- [5] B. S. DeWitt, *In Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Wiley, New York, 1965).
- [6] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. I. The canonical theory”, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [7] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory”, *Phys. Rev.* **162**, 1195 (1967).
- [8] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory”, *Phys. Rev.* **162**, 1239 (1967).
- [9] G. 't Hooft, “One loop divergencies in the theory of gravitation”, *Annales Poincare Phys. Theor.* **A20**, 69 (1974).
- [10] G. 't Hooft y M. J. G. Veltman, “An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure”, *Nucl. Phys.* **B62**, 444 (1973).
- [11] P. A. M. Dirac, “The theory of gravitation in Hamiltonian form”, *Proc. Royal Soc. of London* **A246**, 333 (1958).
- [12] P. A. M. Dirac, “Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation”, *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959).

- [13] P. Bergmann, “The canonical formulation of General Relativistic Theories: The early Years, 1930-1959.”, *Einstein and the History of General relativity* (Birkhäuser, 1989).
- [14] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, “The dynamics of general relativity”, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, 1962).
- [15] C. Rovelli, “Notes for a brief history of quantum gravity”,  
[arXiv:gr-qc/0006061v3](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0006061v3).
- [16] E. Álvarez, “Quantum gravity: an introduction to some recent results”, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 561 (1989).
- [17] E. Álvarez, “Loops versus strings”,  
[arXiv:gr-qc/0307090v2](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0307090v2).
- [18] J. B. Hartle y S. W. Hawking, “Wave Function of the Universe”, *Phys. Rev.* **D28**, 2960 (1983).
- [19] R. Loll, “Discrete approaches to quantum gravity in four dimensions”, *Living Rev. Rel.* **1**, 13 (1998).  
<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-13loll/>.
- [20] A. Connes, *Noncommutative geometry*, (Academic Press, 1994).
- [21] C. Isham, “Topos Theory and Consistent Histories: The Internal Logic of the Set of all Consistent Sets”, *Int. J. Theor. Phys.* **36**, 785 (1997).
- [22] R. Penrose, “Twistor Theory and the Einstein Vacuum”, *Class. Quant. Grav.* **16**, A113 (1999).
- [23] D. Rideout y R. Sorkin, “Evidence for a Continuum Limit in Causal Set Dynamics”, *Phys. Rev.* **D63**, 104011 (2001).
- [24] C. Rovelli, “A dialog on quantum gravity”, *Int. J. Mod. Phys.* **D12**, 1509 (2003).
- [25] H. Nicolai, K. Peeters y M. Zamaklar, “Loop quantum gravity: An outside view”, *Class. Quant. Grav.* **22**, R193 (2005).
- [26] T. Thiemann, “Loop quantum gravity: An inside view”, *Lect. Notes Phys.* **721**, 185 (2007).
- [27] C. J. Isham, “Canonical quantum gravity and the problem of time”  
[arXiv:gr-qc/9210011v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9210011v1).



- [28] J. Butterfield y C. J. Isham, “On the emergence of time in quantum gravity”  
arXiv:gr-qc/9901024v1.

### **Relatividad General y cosmología clásica**

- [29] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler *Gravitation*, (W. H. Freeman and company, 1973).
- [30] R. M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984).
- [31] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, y E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, (Cambridge University Press, 2003).
- [32] M. P. Ryan y L. C. Shepley, *Homogeneous relativistic cosmologies*, (Princeton University Press, 1975).

### **Teoría Cuántica de Campos**

- [33] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol I*, (Cambridge University Press, 1995).
- [34] A. Zee, *Quantum Field Theory in a nutshell*, (Princeton University Press, 2003).
- [35] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, (Clarendon Press, 1989).
- [36] C. Itzykson y J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Dover Publications, 1980).
- [37] R. M. Wald, *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics*, (The University of Chicago Press, 1994).
- [38] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge University Press, 1989).
- [39] N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge University Press, 1982).
- [40] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, (Addison-Wesley, 1995).

### Teoría de cuerdas

- [41] J. Polchinski, *String theory, vol. 1 y vol. 2*, (Cambridge University Press, 1998).
- [42] M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstring theory, vol. 1 y vol. 2*, (Cambridge University Press, 1987).
- [43] T. Ortín, *Gravity and strings*, (Cambridge University Press, 2004).
- [44] E. Álvarez y P. Meessen, “String primer”, *JHEP* **02**, 015 (1999).
- [45] D. Amati, M. Ciafaloni y G. Veneziano, “Superstring collisions at Planckian energies”, *Phys. Lett.* **B197**, 81 (1987).
- [46] D. Amati, M. Ciafaloni y G. Veneziano, “Classical and quantum gravity effects from Planckian energy superstring collisions”, *Int. J. Mod. Phys.* **3**, 1615 (1988).
- [47] D. Amati, M. Ciafaloni y G. Veneziano, “Can spacetime be probed below the string size?”, *Phys. Lett.* **B216**, 41 (1989).
- [48] D. Amati, M. Ciafaloni y G. Veneziano, “Planckian scattering beyond the semiclassical approximation”, *Phys. Lett.* **B289**, 87 (1992).
- [49] G. 't Hooft, “Graviton Dominance in Ultrahigh-Energy Scattering”, *Phys. Lett.* **B198**, 61 (1987).
- [50] H. Verlinde y E. Verlinde, “Scattering at Planckian energies”, *Nucl. Phys.* **B371**, 246 (1992).
- [51] A. Strominger y C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy”, *Phys. Lett.* **B379**, 99 (1996).
- [52] G. T. Horowitz y A. Strominger, “Counting states of near-extremal black holes”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2368 (1996).
- [53] J. M. Maldacena, A. Strominger y E. Witten, “Black hole entropy in M-theory”, *JHEP*, **12**, 002 (1997).
- [54] G. T. Horowitz, J. M. Maldacena y A. Strominger, “Nonextremal Black Hole Microstates and U-duality”, *Phys. Lett.*, **B383**, 151 (1996).
- [55] J. M. Maldacena y A. Strominger, “Statistical Entropy of Four-Dimensional Extremal Black Holes”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 428 (1996).

- [56] G. T. Horowitz, D. T. Lowe y J. M. Maldacena, “Statistical Entropy of Nonextremal Four-Dimensional Black Holes and U-Duality”, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 430 (1996).

### Gravedad Cuántica de Lazos (LQG)

- [57] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [58] A. Ashtekar, “New hamiltonian formulation for general relativity”, *Phys. Rev.* **D36**, 1587 (1987).
- [59] A. Pérez, “Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams”, [arXiv:gr-qc/0409061v3](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409061v3).
- [60] A. Sen, “Gravity as a spin system”, *Phys. Lett.* **B119**, 89 (1982).
- [61] J. F. Barbero, “A Real polynomial formulation of general relativity in terms of connections”, *Phys. Rev.* **D49**, 6935 (1994).
- [62] J. F. Barbero, “Reality conditions and Ashtekar variables: A Different perspective”, *Phys. Rev.* **D51**, 5498 (1995).
- [63] J. F. Barbero, “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times”, *Phys. Rev.* **D51**, 5507 (1995).
- [64] T. Thiemann, *Modern canonical quantum general relativity*, (Cambridge University Press, 2007).
- [65] A. Ashtekar, *Lectures on nonperturbative canonical gravity*, (World Scientific, 1991).
- [66] A. Ashtekar y J. Lewandowski, “Background independent quantum gravity: a status report”, *Class. Quant. Grav.* **21**, R53 (2004).
- [67] C. Rovelli, “Loop quantum gravity”, *Living Rev. Rel.* **1**, 1 (1998).  
<http://www.livingreviews.org/lrr-1998-1>.
- [68] T. Jacobson y L. Smolin, “Nonperturbative quantum geometries”, *Nucl. Phys.* **B299**, 295 (1988).
- [69] C. Rovelli y L. Smolin, “Loop space representation of quantum general relativity”, *Nucl. Phys.* **B331**, 80 (1990).

- [70] A. Ashtekar y C. J. Isham, “Representations of the holonomy algebras of gravity and nonAbelian gauge theories”, *Class. Quant. Grav.* **9**, 1433 (1992).
- [71] A. Ashtekar y J. Lewandowski, “Representation theory of analytic holonomy  $C^*$  algebras”,  
[arXiv:gr-qc/9311010v2](#).
- [72] A. Ashtekar y J. Lewandowski, “Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits”, *J. Geom. Phys.* **17**, 191 (1995).
- [73] A. Ashtekar y J. Lewandowski, “Projective techniques and functional integration for gauge theories”, *J. Math. Phys.* **36**, 2170 (1995).
- [74] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, José Mourão y T. Thiemann, “Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom”, *J. Math. Phys.* **36**, 6456 (1995).
- [75] C. Rovelli, “Black hole entropy from loop quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996).
- [76] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi y K. Krasnov, “Quantum geometry and black hole entropy”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998).
- [77] A. Ashtekar, J. Baez y K. Krasnov, “Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4**, 1 (2000).
- [78] M. Domagala y J. Lewandowski, “Black hole entropy from Quantum Geometry”, *Class. Quant. Grav.* **21**, 5233 (2004).
- [79] A. Ghosh y P. Mitra, “An improved lower bound on black hole entropy in the quantum geometry approach”, *Phys. Lett.* **B616**, 114 (2005).
- [80] A. Corichi, J. Díaz-Polo y E. Fernández-Borja, “Quantum geometry and microscopic black hole entropy”, *Class. Quant. Grav.* **24**, 243 (2007).
- [81] A. Corichi, J. Díaz-Polo y E. Fernández-Borja, “Black hole entropy quantization”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 181301 (2007).
- [82] J. Díaz-Polo y E. Fernández-Borja, “Note on black hole radiation spectrum in Loop Quantum Gravity”,  
[arXiv:0706.1979v1 \[gr-qc\]](#).

- [83] I. Agulló, J. Díaz-Polo y E. Fernández-Borja, “Black hole state degeneracy in Loop Quantum Gravity”,  
`arXiv:0802.3188v1 [gr-qc]`.
- [84] I. Agulló, J. F. Barbero G., J. Díaz-Polo, E. Fernández-Borja y E. J. S. Villaseñor, “Black hole state counting in LQG: A number theoretical approach”,  
`arXiv:0802.4077v1 [gr-qc]`.

### Cuantización polimérica

- [85] W. Kamiński, J. Lewandowski y M. Bobieński, “Background independent quantizations: The scalar field I”, *Class. Quant. Grav.* **23**, 2761 (2006).
- [86] W. Kamiński, J. Lewandowski y A. Okołów, “Background independent quantizations: The scalar field II”, *Class. Quant. Grav.* **23**, 5547 (2006).
- [87] A. Corichi, T. Vukašinac y J. A. Zapata, “Hamiltonian and physical Hilbert space in polymer quantum mechanics”, *Class. Quant. Grav.* **24**, 1495 (2007).
- [88] A. Corichi, T. Vukašinac y J. A. Zapata, “Polymer Quantum Mechanics and its Continuum Limit”, *Phys. Rev.* **D76**, 044016 (2007).
- [89] M. Varadarajan, “Fock representations from  $U(1)$  holonomy algebras”, *Phys. Rev.* **D61**, 104001 (2000).
- [90] A. Ashtekar y J. Lewandowski, “Relation between polymer and Fock excitations”, *Class. Quant. Grav.* **18**, L117 (2001).
- [91] A. Ashtekar, J. Lewandowski y H. Sahlmann, “Polymer and Fock representations for a scalar field”, *Class. Quant. Grav.* **20**, L11 (2003).

### Planitud asintótica (con aplicación a modelos con simetría cilíndrica)

- [92] S. Deser, R. Jackiw y G. 'tHooft, “Three-dimensional Einstein gravity: Dynamics of flat space”, *Ann. Phys.* **152**, 220 (1984).
- [93] J. D. Romano y C. G. Torre, “Internal time formalism for spacetimes with two Killing vectors”, *Phys. Rev.* **D53**, 5634 (1996).

- [94] A. Ashtekar, J. Bicak, y B. G. Schmidt, “Asymptotic structure of symmetry reduced general relativity”, *Phys. Rev.* **D55**, 669 (1997).
- [95] A. Ashtekar, J. Bicak, y B. G. Schmidt, “Behavior of Einstein-Rosen waves at null infinity”, *Phys. Rev.* **D55**, 687 (1997).
- [96] T. Regge y C. Teitelboim, “Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity”, *Ann. Phys.* **88**, 286 (1974).
- [97] D. Marolf y L. Patino, “The non-zero energy of 2+1 Minkowski space”, *Phys. Rev.* **D74**, 024009 (2006).

### Modelos cosmológicos como reducciones de simetría de relatividad general

- [98] A. Ashtekar, R. Tate y C. Uggla, “Minisuperspaces: Observables and quantization”, *Int. J. Mod. Phys.* **D2**, 15 (1993).
- [99] A. Ashtekar, R. Tate y C. Uggla, “Minisuperspaces: Symmetries and quantization”, [arXiv:gr-qc/9302026v1](#).
- [100] B. K. Berger, P. T. Chrusciel y V. Moncrief, “On ‘asymptotically flat’ space-times with  $G(2)$  invariant Cauchy surfaces”, *Ann. Phys.* **237**, 322 (1995).
- [101] R. H. Gowdy, “Gravitational waves in closed universes”, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 826 (1971).
- [102] R. H. Gowdy, “Vacuum space-times with two parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: Topologies and boundary conditions”, *Ann. Phys.* **83**, 203 (1974).
- [103] C. W. Misner, “A Minisuperspace Example: The Gowdy  $T^3$  Cosmology”, *Phys. Rev.* **D8**, 3271 (1973).
- [104] B. K. Berger, “Quantum Graviton Creation in a Model Universe”, *Ann. Phys.* **83**, 458 (1974).
- [105] B. K. Berger, “Quantum cosmology: Exact solution for the Gowdy  $T^3$  model”, *Phys. Rev.* **D11**, 2770 (1975).
- [106] C. Beetle, “Midi-superspace quantization of non-compact toroidally symmetric gravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 471 (1998).

- 
- [107] M. Pierri, “Probing quantum general relativity through exactly soluble midisuperspaces II: Polarized Gowdy models”, *Int. J. Mod. Phys.* **D11**, 135 (2002).
  - [108] A. Corichi, J. Cortez y H. Quevedo, “On unitary time evolution in Gowdy  $T^3$  cosmologies”, *Int. J. Mod. Phys.* **D11**, 1451 (2002).
  - [109] C. G. Torre, “Quantum dynamics of the polarized Gowdy  $T^3$  model”, *Phys. Rev.* **D66**, 084017 (2002).
  - [110] J. Cortez y G. A. Mena Marugán, “Feasibility of a unitary quantum dynamics in the Gowdy  $T^3$  cosmological model”, *Phys. Rev.* **D72**, 064020 (2005).
  - [111] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, “Unitary evolution in Gowdy cosmology”, *Phys. Rev.* **D73**, 041502 (2006).
  - [112] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, “Quantum Gowdy  $T^3$  model: A unitary description”, *Phys. Rev.* **D73**, 084020 (2006).
  - [113] A. Corichi, J. Cortez y G. A. Mena Marugán, “Quantum Gowdy  $T^3$  model: A uniqueness result”, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6301 (2006).
  - [114] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, “Uniqueness of the Fock quantization of the Gowdy  $T^3$  model”, *Phys. Rev.* **D75**, 084027 (2007).
  - [115] A. Corichi, J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, “Quantum Gowdy  $T^3$  Model: Schrodinger Representation with Unitary Dynamics”, *Phys. Rev.* **D76**, 124031 (2007).
  - [116] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, “Evolution operators for linearly polarized two-Killing cosmological models”, *Phys. Rev.* **D74**, 024003 (2006).
  - [117] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, “Hamiltonian dynamics of linearly polarized Gowdy models coupled to massless scalar fields”, *Class. Quant. Grav.* **24**, 5945 (2007).
  - [118] J. F. Barbero G., D. Gómez Vergel y E. J. S. Villaseñor, “Quantum unitary evolution of linearly polarized  $S^1 \times S^2$  and  $S^3$  Gowdy models coupled to massless scalar fields”, [arXiv:0711.1790v2 \[gr-qc\]](#).
  - [119] D. Gómez Vergel, “Schrödinger quantization of linearly polarized Gowdy  $S^1 \times S^2$  and  $S^3$  models coupled to massless scalar fields”, [arXiv:0802.3180 \[gr-qc\]](#).

- [120] J. Cortez, G. A. Mena Marugán y J. M. Velhinho, “Uniqueness of the Fock representation of the Gowdy  $S^1 \times S^2$  and  $S^3$  models”,  
[arXiv:0802.3338 \[gr-qc\]](#).
- [121] B. G. Schmidt, “Vacuum spacetimes with toroidal null infinities”, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2811 (1996).

### Simetría cilíndrica y ondas de Einstein-Rosen

- [122] P. Jordan, J. Ehlers y W. Kundt, “Strenge Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie”, *Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math. Naturwiss. Kl.* **1960**, 2 (1960).
- [123] A. S. Kompaneets, “Strong gravitational waves in vacuum”, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.*, **34**, 953 (1958) [*Sov. Phys. JETP*, **7**, 659 (1958)].
- [124] T. Piran, P. N. Safer y R. F. Stark, “A general numerical solution of cylindrical gravitational waves”, *Phys. Rev.* **D32**, 3101 (1985).
- [125] D. Korotkin y H. Samtleben, “Canonical quantization of cylindrical gravitational waves with two polarizations”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 14 (1998).
- [126] D. Kennefick, “Einstein versus the Physical Review”, *Phys. Today* **58**, 43 (2005).
- [127] A. Einstein y N. Rosen, “On gravitational waves”, *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937).
- [128] G. Beck, “Zur Theorie binärer Gravitationsfelder”, *Z. Phys.* **33**, 713 (1925).
- [129] K. Kuchař, “Canonical quantization of cylindrical gravitational waves”, *Phys. Rev.* **D4**, 955 (1971).
- [130] M. Allen, “Canonical quantization of a spherically symmetric, massless scalar field interacting with gravity in (2+1)-dimensions”, *Class. Quant. Grav.* **4**, 149 (1987).
- [131] A. Ashtekar y M. Pierri, “Probing quantum gravity through exactly soluble midisuperspaces I”, *J. Math. Phys.* **37**, 6250 (1996).
- [132] A. Ashtekar y M. Varadarajan, “A Striking property of the gravitational Hamiltonian”, *Phys. Rev.* **D50**, 4944 (1994).
- [133] R. Geroch, “A method for generating solutions of Einstein’s equations”, *J. Math. Phys.* **12**, 918 (1971).



- [134] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Microcausality and quantum cylindrical gravitational waves”, *Phys. Rev.* **D67**, 124006 (2003).
- [135] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Time uncertainty in quantum gravitational systems”, *Phys. Rev.* **D69**, 044017 (2004).
- [136] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Quantum cylindrical waves and sigma models”, *Int. J. Mod. Phys.* **D13**, 1119 (2004).
- [137] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Particles and vacuum for perturbative and non-perturbative Einstein-Rosen gravity”, *Phys. Rev.* **D70**, 044028 (2004).
- [138] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Asymptotics of regulated field commutators for Einstein-Rosen waves”, *J. Math. Phys.* **46**, 062306 (2005).
- [139] M. Carmeli, C. Charach y S. Malin, “Survey of cosmological models with gravitational, scalar and electromagnetic waves”, *Phys. Rept.* **76**, 79 (1981).
- [140] S. Chandrasekhar, “Cylindrical waves in general relativity”, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A408**, 209 (1986).
- [141] J. F. Barbero G., I. Garay y E. J. S. Villaseñor, “Exact quantization of Einstein-Rosen waves coupled to massless scalar matter”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 051301 (2005).
- [142] J. F. Barbero G., I. Garay y E. J. S. Villaseñor, “Probing quantized Einstein-Rosen waves with massless scalar matter”, *Phys. Rev.* **D74**, 044004 (2006).
- [143] M. Mars y J. M. M. Senovilla, “Axial symmetry and conformal Killing vectors”, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1633 (1993).
- [144] O. Rinne y J. M. Stewart, “A strongly hyperbolic and regular reduction of Einstein’s equations for axisymmetric spacetimes”, *Class. Quant. Grav.* **22**, 1143 (2005).
- [145] K. S. Thorne, “Energy of infinitely long, cylindrically symmetric systems in General Relativity”, *Phys. Rev.* **138**, B251 (1965).
- [146] J. Carot, J. M. M. Senovilla y R. Vera, “On the definition of cylindrical symmetry”, *Class. Quant. Grav.* **16**, 3025 (1999).
- [147] A. Ashtekar, “Large quantum gravity effects: Unforseen limitations of the classical theory”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4864 (1996).

### Desarrollos asintóticos

- [148] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, “Asymptotic analysis of field commutators for Einstein-Rosen gravitational waves”, *J. Math. Phys.* **45**, 3498 (2004).
- [149] C. M. Bender y S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (Springer-Verlag, 1999).
- [150] N. Bleistein y R. A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, (Dover, 1986).

### Estados de Newton-Wigner y localización en teoría cuántica de campos

- [151] T. D. Newton y E. P. Wigner, “Localized states for elementary systems”, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
- [152] P. Teller, *An interpretive introduction to quantum field theory*, (Princeton University Press, 1995).
- [153] B. Thaller, *The Dirac Equation*, (Springer-Verlag, 1993).
- [154] A. S. Wightman y S. S. Schweber, “Configuration Space methods in Relativistic Quantum Field Theory. I”, *Phys. Rev.* **98**, 812 (1955).
- [155] A. S. Wightman, “On the localizability of Quantum Mechanical systems”, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 845 (1962).
- [156] G. N. Fleming, “Covariant Position Operators, Spin and Locality”, *Phys. Rev.* **137**, B188 (1965).
- [157] G. N. Fleming, “Nonlocal properties of stable particles”, *Phys. Rev.* **139**, B963 (1965).
- [158] G. C. Hegerfeldt, “Remark on causality and particle localization”, *Phys. Rev.* **D10**, 3320 (1974).
- [159] G. C. Hegerfeldt y S. N. M. Ruijsenaars, “Remark on causality, localization and spreading of wave packets”, *Phys. Rev.* **D22**, 377 (1980).
- [160] S. N. M. Ruijsenaars, “On Newton-Wigner localization and superluminal propagation speeds”, *Ann. Phys.* **137**, 33 (1981).

**Sistemas  $f(H)$  y estados coherentes**

- [161] J. F. Barbero G., I. Garay y E. J. S. Villaseñor, “Classical and quantum behavior of dynamical systems defined by functions of solvable Hamiltonians”, *Am. J. Phys.* **76**, 153 (2008).
- [162] J. Banerji, “Nonlinear wave packet dynamics of coherent states”, *Pramana J. Phys.* **56**, 267 (2001).
- [163] W. Leoński, “Periodic behaviour of displaced Kerr states”, *Acta Phys. Slovaca* **48**, 371 (1998).
- [164] A. Galindo y P. Pascual, *Quantum Mechanics, Vols. I y II*, (Springer-Verlag, 1991).
- [165] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, (Dover, 1999).
- [166] J. R. Klauder y E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, (W. A. Benjamin, 1968).
- [167] J. R. Klauder, “Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics”, *J. Math. Phys.* **4**, 1058 (1963).

**Otros**

- [168] M. Henneaux y C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, (Princeton University Press, 1992).
- [169] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, (Academic Press, 1980).
- [170] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, self-adjointness*, (Academic Press, 1975).
- [171] S. Wolfram, *Mathematica: A system for Doing Mathematics by Computer*, (Wolfram Media, 2003).

*Este trabajo de tesis ha dado lugar a las siguientes publicaciones:*

- J. Fernando Barbero G., Iñaki Garay y Eduardo J. S. Villaseñor.  
“Exact Quantization of Einstein-Rosen Waves Coupled to Massless Scalar Matter”.  
*Phys. Rev. Lett.* **95**, 051301 (2005).
- J. Fernando Barbero G., Iñaki Garay y Eduardo J. S. Villaseñor.  
“Probing quantized Einstein-Rosen waves with massless scalar matter”.  
*Phys. Rev.* **D74**, 044004 (2006).
- J. Fernando Barbero G., Iñaki Garay y Eduardo J. S. Villaseñor.  
“Classical and quantum behavior of dynamical systems defined by functions of solvable Hamiltonians”.  
*Am. J. Phys.* **76**, 153 (2008).
- J. Fernando Barbero G., Iñaki Garay y Eduardo J. S. Villaseñor.  
“Quantum Einstein-Rosen waves: Coherent states and perturbation theory”.  
(En preparación).